Følger og rekker

John Aslak Wee Kleven

23. januar 2023

I dette dokumentet skal vi se på konvergens av følger og rekker.

Det er skrevet mye om følger og rekker i ulike analyselærebøker, så for å unngå å ende opp med å skrive en dårlig etterlikning av en lærebok, vil jeg være brutalt konsis. På den måten kan vi dekke mye grunn. Dermed må jeg hoppe over nesten alle bevis. Referanser er lagt til for den som vil se dem.

Det er nok flere oppgaver her enn du vil ha tid til å gjøre, så gjør kun de du har lyst til å gjøre. Hvis du ikke har lyst til å bruke mye tid på å gå gjennom dette dokumentet, så kan du hoppe over bevisoppgavene.

Dette dokumentet er begrenset i omfang. Den som vil lære mer, kan lese eller skumlese kapittel 4.3 og 12 i Lindstrøm [2], eller kapittel 2 i Abbott [1]. De er begge gode analysebøker. Den andre er mer teoretisk enn den første. Den er for øvrig en Springer-bok, så man kan få tak i pdf når man er på NTNUs nett her: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4939-2712-8`.

1 Verktøy

Vi er i analyseland, så vi trenger noen verktøy dere kanskje ikke har sett før. Først av alt, kompletthet. I dette dokumentet vil kompletthet være først og fremst et redskap for å påsi at visse type følger konvergerer, som i teorem 3.4, og det vil ikke bli brukt i noen av oppgavene (utenom Cauchykompletthet, som kommer senere). La oss begynne med noen begreper:

Definisjon 1.1. En mengde $A \subseteq \mathbb{R}$ er *oppad begrenset* hvis det fins et tall $b \in \mathbb{R}$ slik at for alle $a \in \mathbb{A}$ så vil $a \leq b$. Tallet b kalles en *øvre grense* for A.

Tilsvarende kan en mengde $A \subseteq \mathbb{R}$ være *nedad begrenset* av en *nedre grense* $b \in \mathbb{R}$ som tilfredsstiller $b \leq a$ for hver $a \in A$.

En mengde $A \subseteq \mathbb{R}$ er *begrenset* hvis den er både oppad og nedad begrenset.

Definisjon 1.2. Et reelt tall $s \in \mathbb{R}$ er den *minste øvre grensen* til en ikketom mengde $A \subset \mathbb{R}$ hvis

(i) s er en øvre grense for A, og

(ii) for hver øvre grense r av A vil $s \leq r$.

Ved egenskap (ii) kan man vise at den minste øvre grensen til en mengde, hvis den fins, er unik. Den kalles også *supremum*, og største nedre grenser kalles *infimum*. De skrives $\sup(A)$ og $\inf(A)$ på kort.

Vi trenger et fint og intuitivt lemma om minste øvre grenser:

Lemma 1.3. Anta at $s \in \mathbb{R}$ er en øvre grense til en ikketom $A \subset \mathbb{R}$. Da vil $s = \sup(A)$ hvis og bare hvis for hver $\varepsilon > 0$ fins en $a \in A$ slik at $s - \varepsilon < a$.

Bevis. Se Abbott [1, 17ff]. En lenke til pdfen er i innledningen. □

Her er poenget med alt dette:

Aksiom 1.4 (Kompletthetsaksiomet)**.** Enhver ikke-tom, oppad begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke i $\mathbb{R}$.

Nå som vi vet hva kompletthet er, så er det noe annet som kan være nyttig for dere:

Teorem 1.5 (ε-prinsippet)**.** La $a, b \in \mathbb{R}$. Hvis $a \leq b + \varepsilon$ for hver $\varepsilon > 0$, så vil $a \leq b$. Hvis $|a - b| \leq \varepsilon$ for hver $\varepsilon > 0$, så vil $a = b$.

Bevis. Se Pugh [3, s. 21]. □

Absoluttverdien har følgende nyttige egenskaper:

$$
\begin{aligned}
|xy| &= |x| \cdot |y| \\
|x| = 0 &\iff x = 0 \\
|x + y| &\leq |x| + |y|
\end{aligned}
$$

for hver $x, y \in \mathbb{R}$. Ulikheten heter *trekantulikheten*, og brukes svært ofte i analyse. Navnet kommer fra å tenke på a og b som punkter/vektorer i planet $\mathbb{R}^2$, hvor en tilsvarende ulikhet holder.

2 Konvergens av følger

2.1 Konvergens

For å avklare hva en følge er;

Definisjon 2.1. En følge av reelle tall er funksjon $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Vi skriver a_n for $a(n)$, og betegner hele følgen med (a_n).

Kommentar. Det er også vanlig å skrive

$$
(a_n), \quad (a_n)_n, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (a_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}
$$

og så videre, for å betegne følger.

Før vi innfører konvergens, vil vi navngi noen klasser av følger som ofte dukker opp.

Definisjon 2.2. La (a_n) være en følge.

(i) (a_n) er *voksende* (*minkende*) hvis $a_n \leq a_{n+1}$ ($\geq$) for hver $n \in \mathbb{N}$. Følgen er *strengt voksende* (*strengt minkende*) hvis ulikheten er en $<$ ($>$).

(ii) (a_n) er *oppad begrenset* hvis det fins $M \in \mathbb{N}$ slik at $a_n \leq M$ for hver $n \in \mathbb{N}$. Følgen er *nedad begrenset* hvis det fins $M' \in \mathbb{N}$ slik at $M' \leq a_n$ for hver $n \in \mathbb{N}$. Følgen (a_n) er *begrenset* hvis den er både oppad og nedad begrenset.

Her er definisjonen av konvergens:

Definisjon 2.3. En følge (a_n) av reelle tall konvergerer mot et reelt tall L hvis for hver $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at for hver $n \geq N$, så vil $|a_n - L| < \varepsilon$. I så fall skriver vi $(a_n) \to L$. Tallet L kan bli kalt *grense* eller *grenseverdi*.

Bemerkning. På kortform blir det

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq M \to |a_n - a| < \varepsilon).$$

Ofte vil vi skrive $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ for å si at a er grensen til følgen (a_n). Merk at dette er ikke det samme som grenseverdier av funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som ofte skrives $\lim_{x\to\infty}$.

Her er enda et begrep:

Definisjon 2.4. En følge som ikke er konvergent kaller vi divergent.

Oppgave 1 (Abbott [1])**.** Finn eksempler på følger (a_n) og (b_n) slik at

(i) Både (a_n) og (b_n) divergerer, men $(a_n + b_n)$ konvergerer.

(ii) Både (a_n) og (b_n) divergerer, men $(a_n \cdot b_n)$ konvergerer.

(iii) (a_n) og $(a_n \cdot b_n)$ konvergerer, men (b_n) divergerer.

Nå som vi vet hva det vil si at en følge konvergerer, så er det en del grunnleggende egenskaper vi må få unnagjort.

Teorem 2.5. Grensen til en konvergent følge er unik. Altså hvis (a_n) er en konvergent følge, så fins kun én $L \in \mathbb{R}$ slik at (a_n) konvergerer mot L.

Oppgave 2. Bevis dette. For å begynne, anta at $(a_n) \to \alpha$ og $(a_n) \to \beta$. Vis nå at $\alpha = \beta$.

Lemma 2.6. Hvis en følge (a_n) er konvergent, så er den begrensa.

Oppgave 3. Vis dette.

2.2 Cauchyfølger

Det er en nyttig egenskap som kan bli brukt for å påvise at en følge er konvergent, uten å måtte trenge å finne en kandidat for hva grenseverdien er slik man må gjøre i definisjonen av grenseverdien.

Definisjon 2.7. En følge (a_n) er *Cauchy* hvis for hver $\varepsilon > 0$, så fins en $N \in \mathbb{N}$ slik at for hver $m, n \in \mathbb{N}$ med $m, n \geq N$, så vil $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$.

Kommentar. På kortform er det

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq N \to |a_m - a_n| < \varepsilon).$$

Her er nytten av Cauchyfølger:

Teorem 2.8. En følge (a_n) av reelle tall er konvergent hvis og bare hvis den er Cauchy.

Oppgave 4. Vis at en konvergent følge er Cauchy. (Den omvdente implikasjonen trenger kompletthet)

Dette viser seg å være så nært knyttet komplettheten til $\mathbb{R}$ (i den forstanden nevnt over) at teoremet over formuleres som at $\mathbb{R}$ er Cauchy-komplett.

Oppgave 5. (Eksamen MA1102 V22, litt modifisert)
Anta at $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots$, at $b_n > a_n$ for hver $n \in \mathbb{N}$, og at $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. For hver $n \in \mathbb{N}$, la x_n være et vilkårlig punkt i $[a_n, b_n]$. Vis at (x_n) er en Cauchy-følge, og videre at snittet

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall n \in \mathbb{N})(x \in [a_n, b_n])\}$$

som er mengden av alt det $[a_i, b_i]$-intervallene har til felles, inneholder kun ett punkt.

Oppgave 6. (Øving MA1102; vanskelig) Anta at (a_n) er en følge av reelle tall slik at for hver $N > M > 0$, så vil

$$|a_M - a_{M+1}| + |a_{M+1} - a_{M+2}| + \cdots + |a_{N-1} + a_N| \leq 1.$$

Vis at (a_n) er en konvergent følge.

2.3 Divergens

Intuitivt vil følger som (2^n) og $(\log(n))$ "gå mot uendelig". Noen andre følger, som $((-1)^n)$, vil ikke gå noen spesifikke steder. De vil hverken konvergere eller gå mot (pluss eller minus) uendelig. Her er definisjonene:

Definisjon 2.9. La (a_n) være en følge. Hvis $c \in \mathbb{R}$ så fins en $N \in \mathbb{N}$ slik at for hver $n \geq N$, så vil $a_n \geq c$, så vil følgen divergere mot ∞. I så fall skriver vi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Hvis for hver $c \in \mathbb{R}$ så fins en $N \in \mathbb{N}$ slik at for hver $n \geq N$ så vil $a_n \leq c$, så vil følgen divergere mot $-\infty$, og vi skriver i så fall

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Kommentar. Kortformen til at (a_n) går mot uendelig er

$$(\forall c > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \to a_n \geq c)$$

Oppgave 7 ([2])**.** Bruk definisjonen til å vise at $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

3 Teoremer om konvergente følger

Før vi skal teste konvergens av følger, så er det noen andre teoremer som er fine å kunne. Noen er av mer teoretisk interesse enn andre.

Teorem 3.1. La (a_n) og (b_n) være to følger som konvergerer henholdsvis mot a og b. Da vil

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iv) Hvis $b \neq 0$, så vil $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Bevis. Første og andre punkt er ganske grei, og tredje punkt er en fin oppgave. Se Lindstrøm [2, s. 211] eller Abbott [1, s. 57] for bevis. □

Oppgave 8. Vis punkt (iii). (Du kan få nytte av lemma 2.6.)

Oppgave 9 ([1])**.** La (a_n) være en konvergent følge. Vis at følgen (b_n) gitt ved ved

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

konvergerer mot samme grense. Finn et eksempel hvor (a_n) konvergerer, men (b_n) ikke gjør det.

Teorem 3.2. La $(a_n) \to a$ og $(b_n) \to b$.

(i) Hvis $a_n \geq 0$ for hver $n \in \mathbb{N}$, så vil $a \geq 0$.

(ii) Hvis $a_n \leq b_n$ for hver $n \in \mathbb{N}$, så vil $a \leq b$.

(iii) Hvis det fins $c \in \mathbb{R}$ slik at $c \leq b_n$ for hver $n \in \mathbb{N}$, så vil $c \leq b$. Tilsvarende, hvis det fins $c \in \mathbb{R}$ slik at $c \geq a_n$ for hver $n \in \mathbb{N}$, så vil $c \geq a$.

Bevis. Teoremet er hentet fra Abbott [1, s. 53], og et bevis kan man finne der. □

Teorem 3.3 (Skvisteoremet)**.** Anta at (a_n), (b_n) og (c_n) være tre følger av reelle tall slik at

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

for hver $n \in \mathbb{N}$, og at både (a_n) og (c_n) konvergerer mot en $L \in \mathbb{R}$. Da vil (b_n) også konvergere mot L.

Oppgave 10. Bevis dette.

Kommentar. Dette teoremet har også en tilsvarende analog for grenseverdier av funksjoner.

Teorem 3.4 (Monotone konvergenssats)**.** En oppad begrenset voksende følge av reelle tall er konvergent. (Tilsvarende, en nedad begrenset følge av reelle tall er konvergent)

Bevis. Merk at teoremet krever kompletthet, da det åpenbart ikke holder for $\mathbb{Q}$. For et bevis, se Lindstrøm [2, s. 211] eller Abbott [1, s. 56]. □

Oppgave 11 ([1])**.** Bruk teoremet over til å vise at summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergerer for $p > 1$.

Det er også et veldig nyttig teorem som kobler sammen

Teorem 3.5 (Sekvensiell kontinuitet)**.** La $f : A \to \mathbb{R}$ være en funksjon, og $A \subseteq \mathbb{R}$. Da er f kontinuerlig i $a \in A$ hvis og bare hvis for hver følge (a_n) av punkter som konvergerer mot L, så vil følgen $(f(a_n))_n$ konvergere mot $f(L)$.

Bemerkning. Det andre kravet kan også bli skrevet som

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)$$

så man kan tenke seg at kontinuerlige funksjoner "bevarer konvergens av følger". Dette gir altså et krav for når vi har lov til å bytte funksjon og grenseverdier.

Bevis. Vi viser bare den éne implikasjonen. Den motsatte implikasjonen antar for motsigelse at funksjonen ikke er kontinuerlig, og konstruerer en følge som gir en motsigelse. Detaljer kan man finne i Lindstrøm [2, s. 237], og i Abbott [1, s. 118].

($\Rightarrow$) Vi antar at f er kontinuerlig i a, og at $(a_n) \to a$. Altså at

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x - a| \leq \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \tag{1}$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \to |a_n - a| \leq \varepsilon) \tag{2}$$

Vi ønsker å vise at $(f(a_n))_n \to f(a)$, altså at

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq M \to |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon) \tag{3}$$

Vi har to legoklosser, og vi må kombinere dem riktig for å få det vi vil ha. Per (2) er vi gitt en $\varepsilon > 0$, og vi skal vise at en visz N fins. Så vi er gitt en ε, og vi ønsker å kontrollere størrelsen

$$|f(a_n) - f(a)|.$$

Ved å gi vår egne ε til (1) får vi en $\delta > 0$ slik at for alle $x \in A$ slik at $|x - a| < \delta$, så vil

$$|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Så ved å sammenlikne med (3) må vi bare finne en N slik at hele a_n er innenfor en δs avstand av a.

Siden følgen (a_n) konvergerer mot a, forer vi inn[1] $\varepsilon' = \delta$ til (2), og får en N slik at for $n \geq N$, så vil

$$|a_n - a| \leq \varepsilon' = \delta$$

slik at det vi gjorde med (1) gir

$$|f(a_n) - f(a)| \leq \varepsilon$$

men dette er (3), så vi er ferdige. $\square$

[1] Hvis dere ikke gjør det alt, tenk på (1) og (2) som funksjoner. Hvis du gir inn ε, så får du tilbake δ eller N. Det betyr at vi kan gi inn hvilken som helt ε vi vil. Dette kan imidlertid føre til noe forvirring, så hold tunga rett i munn!

Kommentar. Med maskineriet over kan vi vise et spesialtilfelle for punkt (iv) i teorem 3.1, nemlig at $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = b$, siden funksjonen $x \mapsto 1/x$ er kontinuerlig, noe vi antar at er tidligere vist. Deretter kan vi vise hele punkt (iv) ved å bruke punkt (iii).

Vi kan ikke uten videre bruke teoremet over for å vise de andre regnereglene, siden $+$, $-$ og $\cdot$ er flervariable funksjoner. Det fins en generalisering av dette teoremet[2] som gjør at det også holder for funksjoner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Hvis man har vist at at vektorfølgen $((a_n, b_n))$ konvergerer mot vektoren (a, b), begge i $\mathbb{R}^2$, og så kan man anvende $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (som vi antar at vi har tidligere vist at er kontinuerlig) for å følgen $(a_n + b_n)$ til å konvergere mot $+(a, b) = a + b$. Med dette i bakhodet kan vi se på punkt (i) til (iii) i 3.1 som å si at funksjonene addisjon, subtraksjon og multiplikasjon er kontinuerlig som flervariable funksjoner. Samtidig får vi også liknende regneregler for andre kontinuerlige flervariable funksjoner vi kan ende opp med å møte.

Oppgave 12. Anta at $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige og at $f(x) = g(x)$ for hver $x \in \mathbb{Q}$. Vis at $f(x) = g(x)$ for hver $x \in \mathbb{R}$.

4 Rekker

Vi skal nå se på rekker. Rent algebraisk er det umulig å legge sammen uendelig mange tall. Hvis du ser på definisjonen til addisjon[3], så forteller den deg at addisjon kan kun legge sammen to ting. Fra to kan man få tre, og fra tre kan man få fire og så videre, så man kan legge sammen endelig mange ting, men der stopper det.

Vi driver med analyse nå, så vi har *virkelig* lyst til å legge sammen uendelig mange ting. Dermed er vi nødt til å bruke grenseverdier.

Definisjon 4.1. En rekke $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergerer mot $L \in \mathbb{R}$ hvis følgen av partialsummer (b_n) gitt ved

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

konvergerer mot L.

I resten av dokumentet skal vi se på noen nyttige kriterier for når rekker konvergerer. Referanser for videre lesing (og forsåvidt for bevisene er kapittel 2.7 i Abbott [1], og i kapittel 12 i Lindstrøm [2].

Teorem 4.2. Hvis $x \in \mathbb{R}$ er slik at $|x| < 1$, så vil

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Altså, rekka på venstresida konvergerer, og er lik $\frac{1}{1-x}$.

Oppgave 13. Bevis dette.

[2]... som dukker opp i TMA4145 Lineære Metoder.

[3]For eksempel i kroppaksiomene, eller i Peano-aksiomene.

Bemerkning. Denne summen er mye mer generell enn den ser ut. Den holder (selvfølgelig) også for komplekse tall, for matriser gitt en passende definisjon av $|\cdot|$, og forsåvidt lineæroperatorer, også med en passende definisjon av $|\cdot|$[4]. Hvis du har spicy tallsystemer som de p-adiske tallene kan du få til ting som

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

som holder i de 3-adiske tallene $\mathbb{Q}_3$, med absoluttverdien $|\cdot|_3$.

Oppgave 14. Som et eksempel, la

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Beregn

$$I + A + A^2 + \cdots + A^{10} \quad \text{og} \quad (I - A)^{-1}$$

Sammenlikn resultatene. Blir det bedre hvis du summerer til A^{20} eller A^{50}? (Bruk Python til å gjøre beregningene hvis du vil ha vettet i behold.)

Her er noen flere teoremer:

Teorem 4.3. Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så vil $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Oppgave 15. Gi et bevis for dette. (Hint: Bruk det at partialsummene danner en Cauchyfølge)

Teorem 4.4. Man kan legge sammen og gange konvergente rekker på vanlig vis; altså hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ og $c \in \mathbb{R}$, så vil

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA$$

Teorem 4.5. Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en konvergent rekke, og anta at (b_n) er en følge slik at $|b_n| \leq a_n$ for hver $n \in \mathbb{N}$. Da vil $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergere.

Nå kommer vi til de litt mer kraftige verktøyene.

Teorem 4.6 (Forholdstesten)**.** Gitt en følge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, og la

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

(gitt at grensen fins). Hvis $r < 1$, så vil rekka konvergere, og hvis $r > 1$, så vil rekka divergere.

Oppgave 16. Vis at disse rekkene konvergerer for hver $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

[4]Dette dukker opp i TMA4145 Lineære Metoder.

Oppgave 17. Se nå på en rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, hvor x er et tall. Anta at grensen $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n}$ fins. Finn intervallet for hvilke x-verdier som får rekken til å konvergere. Du trenger ikke å tenke på endepunktene til intervallet.

Teorem 4.7 (Rottesten)**.** La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en rekke, og la

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(gitt at den fins). Hvis $r < 1$, så konvergerer rekka, og hvis $r > 1$ divergerer den.

Det er også et teorem som gir oss et eksplisitt feilestimat:

Teorem 4.8 (Alternerende rekketest)**.** Anta at (a_n) er en følge hvor hvert ledd er positivt, og seg på rekka $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Hvis (a_n) er en minkende følge, og $(a_n) \to 0$, så konvergerer rekka. Videre, hvis S er summen og S_n er summen av de første n leddene i rekka, så vil $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

Ved hjelp av dette teoremet kan vi få noen garanterte grenser for $\sin(x)$ (for $x > 0$) og slikt.

5 Referanser

[1] Stephen Abbott. *Understanding Analysis*. 2. utg. Springer, 2015. ISBN: 978-1-4939-2711-1. URL: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4939-2712-8` (Sitert på s. 1–3, 5–7).

[2] Tom Lindstrøm. *Kalkulus*. 4. utg. 2. opplag. Oslo: Universitetsforlaget, 2016. ISBN: 978-82-15-02710-4 (Sitert på s. 1, 4–7).

[3] Charles Chapman Pugh. *Real Mathematical Analysis*. 2. utg. Springer, 2015 (Sitert på s. 2).