Lineære differensiallikninger

John Aslak Wee Kleven

10. januar 2023*

I denne artikkelen skal vi se på hvordan lineæralgebra kan gjøre det enkelt å løse visse differensiallikninger som ved første øyekast (for eksempel når man ser dem i R2) ser veldig vanskelige ut.

Jeg lærte disse tingene i MA1202 Lineær Algebra med anvendelser, og læreboka da jeg tok det var Friedberg mfl. (2014). Det vi skal diskutere er, i min kopi av boka, i kapittel 2.7 (lineær differensiallikning) og en del av kapittel 5.2 (system av lineære differensiallikninger).

Seksjonen om lineære homogene differensiallikninger med konstante koeffisienter har et spesialtilfelle man ser dukke opp i fysikk, nemlig differensiallikninger av formen

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Dette var pensum i R2 da jeg tok det. Jeg tror det falt bort med Fagfornyelsen LK20. Lesere som tok R2 uten dette spesialtilfellet som pensum vil kanskje ikke finne "dette skjønte du ikke da du tok R2, men her ser vi det"-kommentarene like belysende som dette var for meg da jeg så det for første gang.

1 Introduksjon

I TMA4101 lærte dere å løse differensiallikninger på formen

$$ay'' + by' + cy = 0$$

hvor y er en funksjon og $a, b, c \in \mathbb{R}$, og differensiallikninger på formen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

hvor A er en matrise. Vi skal løse disse problemene på måter som er langt mer tilfredsstillende enn det dere så i TMA4101.

2 Forarbeid

Vi trenger noen definisjoner og sånt.

Definisjon 2.1. La V være et vektorrom over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$.

1. $\mathcal{L}(V)$ er mengden av lineærfunksjoner fra V til V.

*Versjon 12. januar 2023. Små endringer og feilretting har blitt gjort siden.

2. $\mathrm{id} : V \to V$ er identitetsfunksjonen $\mathrm{id}(v) = v$.

3. $\mathcal{C}^\infty$ er vektorrommet av reelle eller komplekse uendeligderiverbare funksjoner (over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$).

4. $D : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$, derivasjonsoperatoren, er definert som $f \mapsto f'$.

5. Gitt $f, g \in \mathcal{L}(V)$, la $f + g : V \to V$ være gitt ved $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$.

6. Gitt $r \in \mathbb{R}$ og $f \in \mathcal{L}(V)$, la $r \cdot f : V \to V$ være gitt ved $(r \cdot f)(v) = r \cdot f(v)$.

7. Gitt $f, g \in \mathcal{L}(V)$, definer $fg : V \to V$ som komposisjonen $f \circ g : V \to V$, som er gitt ved $(f \circ g)(v) = f(g(v))$.

Vi kan observere at de tre måtene vi har definert å lage lineæroperatorer på, gir lineæroperatorer. Altså, gitt lineæroperatorer i $\mathcal{L}(V)$ kan vi lage nye operatorer. Dette betyr spesielt at $\mathcal{L}(V)$ er et vektorrom, men det har forsåvidt mer struktur fordi vi har en salgs "multiplikasjonsoperasjon" ved komposisjon. Dette inviterer oss til å involvere polynomer.

Gitt en lineæroperator $T \in \mathcal{L}(V)$, definerer vi T^n som $T \circ \cdots \circ T$ hvor det er n T-er.

Definisjon 2.2. Gitt et polynom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, og en lineærfunksjon $T \in \mathcal{L}(V)$, la

$$p(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 \,\mathrm{id}$$

Ved observasjonene over er $p(T)$ en lineæroperator.

Noe om lineærfunksjoner: Kjernen, også kalt nullrommet, til en lineærfunksjon $f \in \mathcal{L}(V)$, er gitt ved

$$\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

Dette viser seg å være et vektorrom *av seg selv*, med samme $+$ og $\cdot$ som i V. Vi sier at $\ker(f)$ er et *underrom* av V.

Vi skal snart se på lineære homogene differensiallikninger med konstante koeffisienter (phew!), og for det trenger vi et lemma.

Lemma 2.3. Hvis y løser

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

så er y uendelig deriverbar.

Bevis. Skriv

$$y^{(n)} = -\frac{1}{a_n}\left(a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y\right)$$

På høyresida har vi en sum av flere ledd, og hver av disse har deriverte av y opp til $n - 1$ ganger. Dermed kan vi derivere høyresida en gang til, siden vi antar (implisitt) at y er deriverbar n ganger. Dermed er y deriverbar $n + 1$ ganger, så ved induksjon er y deriverbar så mange ganger vi vil. $\square$

Vi trenger også noe om komplekse tall. Den komplekse eksponensialfunksjonen tilfredsstiller

$$e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Hvorfor dette er fullstendig naturlig, vil dere se når dere kommer til potensrekker i TMA4106. Den vanligste komplekse definisjonen er

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

som viser seg å konvergere for alle $z \in \mathbb{C}$.

Man kan vise at denne komplekse eksponensialfunksjonen tilfredsstiller alle de egenskapene vi er vant med fra $\mathbb{R}$, og at kompleks derivasjon er lineær (slik det er i $\mathbb{R}$), så det er ingen problem å se på problemstillingen vår som en kompleks en.

3 Lineære homogene differensiallikninger med konstante koeffisienter

Vi skal se på differensiallikningen

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1}$$

hvor $a_n neq$ er ikkenull. Vi vil heretter anta at $a_n = 1$, som er ekvivalent med problemet over ved å dele på a_n og få nye verdier for a_i-ene. Vi vil se at vi kan la a_i-ene være komplekse tall; teorien blir ikke påvirka av det. Så vi antar at $a_i \in \mathbb{C}$ og at $a_n = 1$.

Lemmaet i forrige seksjon antyder til at vi skal se på vektorrommet $\mathcal{C}^\infty$ over $\mathbb{C}$ av uendeligderiverbare[1] på formen $y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, siden alle løsninger til (1) må være uendelig deriverbare. Det er en god grunn til hvorfor vi velger $\mathbb{C}$ her ovenfor $\mathbb{R}$, og det vil bli tydelig senere.

Vi skal først se på denne differensiallikningen fra en annen vinkel. La $p(x)$ være polynomet

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Vi kan da omformulere (1) til

$$(p(D))(y) = 0$$

som ser mye enklere ut. Dette gir oss vår første observasjon. Siden kjernen er et vektorrom, ser vi at

Observasjon 1. Mengden av alle løsninger av (1) danner et vektorrom.

Vi vet at hvert vektorrom har en basis, så dette gir oss umiddelbart informasjon om strukturen til løsningene til (1). Det hadde for eksempel vært spesielt fint hvis dette vektorromet var endeligdimensjonalt. Vi ble iallefall i R2 fortalt (ikke direkte) at hvis $n = 2$, så er denne dimensjonen lik 2, som er lovende.

[1] Dette betyr at du kan derivere funksjonen så mange ganger du vil.

Iallefall så har vi nå et polynom, og vi kan gange sammen lineærfunksjoner, så det er fristende å faktorisere polynomet til

$$p(z) = (z - r_1) \cdots (z - r_n)$$

hvor r_i-ene er komplekse tall. Dette vet vi at vi kan gjøre fordi polynomer med koeffisienter i $\mathbb{C}$ har alltid slike faktoriseringer, og det er også nøyaktig n faktorer siden det er graden til n. Nå kan det være fristende å tenke at kanskje vil

$$p(D) = (D - r_1 \operatorname{id}) \cdots (D - r_n \operatorname{id}) \tag{2}$$

men vi har grunn til å være litt skeptiske til idéen her, da multiplikasjon av lineærfunksjoner trenger ikke å være kommutativ (altså, det kan hende at $fg \neq gf$ for $f, g \in \mathcal{L}(V)$). Så vi har en reell mulighet for at kanskje

Observasjon 2. Lineæroperatorene på formen $(D - c \operatorname{id})$ kommuterer[2] med hverandre for alle $c \in \mathbb{C}$.

Bevis. Du kan gange det ut, og se at det blir det samme. Det kommer i bunn og grunn fra det at D og id kommuterer, som de selvfølgelig gjør fordi

$$D \operatorname{id} = D = \operatorname{id} D$$

□

Vi kan gange ut og se at (2) faktisk stemmer, og vi slipper å være bekymra om hvorvidt rekkefølgen er viktig.

Vi har nå en stor kanon som gjør resten av problemet trivielt. Beviset husker jeg ikke, så det er best for meg å henvise til læreboka og si meg fornøyd. Det er

Teorem 3.1. Løsningsrommet til $(p(D))(y) = 0$ har dimensjon n, hvor n er graden til polynomet p.

Bevis. Se Friedberg mfl. (2014, teorem 2.32) hvis du vil ha et bevis. I min utgave av boka er det på side 135, men det er en Pearson-bok, så det kan hende at den er ti utgaver gammel når du leser dette. □

Teoremet over er en reell kanon og er ekstremt nyttig, for det forteller oss at alt vi trenger å gjøre for å finne den generelle løsningen er å hoste opp n lineært uavhengige spesielle løsninger. Innholdet i resten av denne seksjonen kan bli litt drøyt; for noen lesere kan det være mer belysende å se på eksemplene i neste seksjon for å få idéen til hva vi gjør her, og å så komme tilbake.

La oss skrive opp likningen vi vil løse igjen. Den er

$$(D - r_1 \operatorname{id}) \cdots (D - r_n \operatorname{id})(y) = 0 \tag{3}$$

Vi ser at én måte å få dette til å være null på, er for at $(D - r_n)(y) = 0$. Siden rekkefølgen ikke er viktig, forteller dette oss at

$$\ker(D - r_i \operatorname{id}) \subseteq \ker(p(D))$$

for hver $1 \leq i \leq n$. Altså er hver y som løser $y' = r_i y$ også en løsning av (3) og dermed også 1(!).

[2]Dette betyr at du kan bytte rekkefølgen og fortsatt få samme svar. Altså kommuterer f og g i $\mathcal{L}(V)$ hvis $fg = gf$.

Hvis r_i-ene er alle ulike, så er vi ferdige: Vi har funnet n lineært uavhengige løsninger (velg én fra hver av $\ker(D - r_i)$), men vi har problemer hvis ikke alle r_i-ene er ulike. La oss se nøyere på det.

Så anta nå at vi skal løse

$$(D - r\,\mathrm{id})^n(y) = 0 \tag{4}$$

Teorem 3.1 sier at denne har n lineært uavhengige løsninger, og vi har allerede etablert at

$$y(t) = e^{rt}$$

er en løsning. Vi skal nå finne resten av dem med et triks. Anta at $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er en løsning av (4), og anta at u er på formen

$$u(z) = f(z) \cdot y(z)$$

hvor y løser $(D - r\,\mathrm{id})(y) = 0$, altså $y' - ry = 0$, altså $y(z) = e^{rz}$. Vi skal nå regne ut $(D - r\,\mathrm{id})^n(u)$. Vi regner:

$$\begin{aligned}
(D - r\,\mathrm{id})^n(u) &= (D - r\,\mathrm{id})^{n-1}(D - r\,\mathrm{id})(u) \\
&= (D - r\,\mathrm{id})^{n-1}(f'y + \cancel{yf'} - \cancel{ry}) \\
&= (D - r\,\mathrm{id})^{n-1}(f'y)
\end{aligned}$$

hvor vi bruker produktregelen for å få $f'y + yf'$, og vi kan kansellere de to siste leddene fordi y tilfredsstiller $(D - r\,\mathrm{id})(y) = 0$, altså $y' = ry$. Vi kan gjøre samme beregning på nytt, og ved induksjon få

$$(D - r\,\mathrm{id})^n(u) = f^{(n)}y.$$

Siden u skal løse 4 må da

$$f^{(n)}(z)y(z) = 0$$

for alle $z \in \mathbb{C}$. Men siden $y(z) = e^{rz}$ vil y aldri være null, så vi kan dele på y og få

$$f^{(n)}(z) = 0$$

for alle $z \in \mathbb{C}$. Altså er f et polynom av grad $n-1$, så vi kan hoste opp n lineært uavhengige spesielle løsninger av (4):

$$e^{rz}, \quad ze^{rz}, \quad \cdots \quad z^{n-1}e^{rz}$$

Dette er også hvor den rare xe^x-en man ser i R2 kommer fra.

Vi har nå fullstendig og totalt løst likningen vi begynte med, *uansett hvor stor grad polynomet har.* Da du tok R2 tenkte du kanskje at tredjegradsproblemer som

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$$

var *enda* vanskeligere enn men du kan nå løse den. (Prøv det! Hint: Faktoriseringen er fin.).

For å understreke hvor kult dette er, her er problemet vi begynte med, igjen:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

For å finne løsningene kan vi altså bruke følgende prosedyre:

1. Faktoriser polynomet til nullpunkter $r_1, \cdots, r_k$ med multiplisiteter $n_1, \cdots, n_k$.

2. For hver i er
$$e^{r_i x}, \quad xe^{r_i x}, \quad \cdots \quad x^{n_i} e^{r_i x}$$
løsninger av differensiallikningen.

3. En generell løsning av (1) er en lineærkombinasjon av løsningene nevnt over.

To ting er verdt å kommentere.

Argumentet over understreker hvorfor det karakteristiske polynomet dukker opp når du vil løse lineære homogene differensiallikninger med konstante koeffisienter. Da du tok R2 var det kanskje som om en kanin ble trukket opp av en hatt.

Da du tok R2 så du at hvis røttene til det karakteristiske polynomet er komplekse, så får man en dempet svingning og det blir noen sinuser og cosinuser. Dette skjer nemlig fordi hvis vi ser på differensiallikningen

$$ay'' + b$$

og $x \pm iy$ er røttene, så får vi basisen

$$\{e^x e^{iy}, \quad e^x e^{-iy}\}$$

som er
$$\{e^x(\cos(y) + i\sin(y)), \quad e^x(\cos(y) - i\sin(y))\}$$
og hvis vi *insisterer* at vår løsning skal være en reell funksjon, så setter det én begrensning på koeffisientene i lineærkombinasjonene. Vi kan tenke komplekst og utlede hvordan den må se ut, eller så kan vi bare se at hvis vi vil at koeffisientene våre skal være i $\mathbb{R}$ *og* at løsningen skal være reell, så blir følgende en basis:

$$e^x \cos(y), \quad e^x \sin(y)$$

som er det man ser i R2.

4 Eksempler

Slutten av teorien i forrige seksjon ble kanskje litt tørr, så la oss ta to eksempler.

La oss først se på

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Dette har karakteristisk polynom

$$p(x) = (x-2)(x-3)$$

så rota 2 gir at e^{2x} er en løsning, og rota 3 vil gi at e^{3x} er en løsing. Siden begge røttene har multiplisitet 1 er dette alle løsningene det er, så vår basis for løsningsrommet er
$$\{e^{2x}, e^{3x}\}.$$

Et mer komplisert eksempel:

$$y'''' - 5y''' + 9y'' - 7y' + 2y = 0$$

Det karakteristiske polynomet har faktorisering

$$p(x) = (x-1)^3(x-2)$$

så vår basis blir

$$\{e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}\}.$$

5 Kort om inhomogene likninger

En lineær differensiallikning med konstante koeffisienter er *inhomogen* hvis den er på formen

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f \tag{5}$$

for en funksjon $f \in \mathcal{C}^\infty$. Lineariteten til uttrykket til venstre (som funksjon av y) gjør at likningene på har et nært forhold til den homogene likningen. Dette er et resultat dere allerede har sett, men det er forbløffende enkelt å vise for hvor mye det sier om en tilsynelatende vanskelig differensiallikning. Det holder forsåvidt også for lineæroperatorer generelt, med nøyaktig det samme beviset, men vi fokuserer på differensiallikninger her.

Teorem 5.1. Fikser en løsning $h \in \mathcal{C}^\infty$ av (5). Enhver løsning av (5) er på formen $h + g$, hvor g løser den underliggende homogene likningen

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{6}$$

Bevis. En annen formulering av teoremet er at hvis g og h løser (5), så vil $g - h$ løse (6). Da vil nemlig $g = h + (g - h)$ være vår ønskede dekomponering, da $(g - h)$ vil løse (6). Som gjort over, la p være det karakteristiske polynomet til diff.likningen. Da vet vi at $p(D)$ er lineær, og vi har antagelsene

$$p(D)(h) = f \quad \text{og} \quad p(D)(g) = f.$$

Ved lineariteten til $p(D)$ vil da

$$p(D)(g - h) = p(D)(g) - p(D)(h) = f - f = 0$$

slik at $g - h$ løser (6). □

6 Systemer av differensiallikninger

I TMA4101 lærte dere å løse systemet av differensiallikninger

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

for en $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Kanskje dere så løsningen

$$y(t) = v_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{7}$$

hvor v_1 og v_2 er to egenvektorer til A, kanskje med noen krav om at de ikke er lineært avhengige eller noe sånt (gitt at dette er mulig), og y er vektoren av y_1 og y_2.

Vi skal løse problemet generelt, og se hvordan det gir formelen over. Generelt ønsker vi å løse differensiallikningen

$$y' = Ay \tag{8}$$

hvor y er en vektor av funksjoner, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en matrise, og y' vektoren hvor hver enkeltkomponent er derivert. Formelt sett kan vi si at y er et element i vektorrommet $(\mathcal{C}^\infty)^n$, og at derivasjonsoperatoren $D : (\mathcal{C}^\infty)^n \to (\mathcal{C}^\infty)^n)$ virker leddvis. Da kan vi skrive likningen som $Dy = Ay$, som vil bli nyttig for oss senere.

Først, noen ting om diagonalisering av matriser. Dette vil dere lære senere i TMA4106, så jeg vil ikke gå i dybden her. Merk at i prinsippet er det ingenting her som hindrer oss fra å bruke $\mathbb{C}$, men i motsetning til differensiallikningproblemet over er vi ikke på samme måte påkrevd å bruke $\mathbb{C}$.

Definisjon 6.1. En matrise $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ er *diagonaliserbar* hvis det fins en inverterbar matrise $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ slik at

$$A = P \Lambda P^{-1}$$

for en diagonalmatrise $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Det viser seg at hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer, så kan man diagonalisere A ved å la P ha egenvektorene som søyler. Det viser seg forsåvidt at diagonaliserbarheten til A er ekvivalent med at matrisen har n lineært uavhengige vektorer, så vi ser umiddelbart at hvis vi skal bruke diagonalisering for å løse et problem, så vil det ikke fungere for alle matriser[3]. Vi vil senere se at dette ikke er et problem for det vi har lyst til å gjøre.

For å kunne komme fram til (7) trenger vi en egenskap om diagonalisering.

Lemma 6.2. Hvis A er diagonaliserbar, så er diagonalelementene i Λ egenverdiene til A.

Bevis. Enkelt. Hvis Λ har r_i i søyle i, så vil

$$\Lambda e_i = r_i e_i$$

hvor e_i er den i-te enhetsvektoren. Så Λ har e_i som egenvektor med r_i som egenverdi. Men, ved diagonaliseringen til A kan vi skrive

$$APe_i = P\Lambda e_i$$

som, siden e_i er en egenvektor til Λ, vil vi gi

$$A(Pe_i) = P(r_i e_i) = r_i(Pe_i)$$

så Pe_i er en egenvektor til A med egenverdi r_i. Samtidig så kan ikke A ha flere enn n egenverdier (et polynom av grad n kan ikke ha flere enn n røtter; dette kan man vise uten å involvere komplekse tall!), så siden A har n egenverdier kan ikke matrisen ha flere enn disse. $\square$

[3] Et fint eksempel på en matrise som ikke diagonaliserbar er $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Kan du vise at den ikke er det?

Før vi prøver å løse (8), la oss se hvordan problemet blir hvis A er diagonal. I det tilfellet vil differensiallikningene være "koblet fra" hverandre. For eksempel, hvis A er 2×2, så vil

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, y_1 \\ b\, y_2 \end{pmatrix}$$

så ved å lese av får vi likningssettet

$$y_1' = ay_1; \quad y_2' = by_2$$

som er enkelt å løse. Tilsvarende blir det i høyere dimensjoner.

Hvis vi kunne, skulle vi altså gjerne redusert problemet i (8) til et hvor A er lineær. La oss gjøre det. Anta at A er diagonaliserbar med $A = P\Lambda P^{-1}$. Da får vi følgende ekvivalente utsagn for når y løser likningen:

$$\begin{aligned} Dy = Ay &\iff Dy = P\Lambda P^{-1}y \\ &\iff P^{-1}Dy = \Lambda P^{-1}y \end{aligned}$$

Det hadde vært veldig fint hvis D og P^{-1} kommuterte. Det viser seg å være slik. For eksempel, for 2×2-matriser, hvis $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, så vil

$$P^{-1}Dy = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1' + by_2' \\ cy_1' + dy_2' \end{pmatrix}$$

mens hvis vi bytter rekkefølge, så blir det

$$DP^{-1}y = D\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1' + by_2' \\ cy_1' + dy_2' \end{pmatrix}$$

som er det samme. Med det kan vi konkludere at

$$Dy = Ay \iff D(P^{-1}y) = \Lambda(P^{-1}y) \tag{9}$$

La $z = P^{-1}y$. Nå som Λ er diagonal er likningen på høyre enkel å løse, som vi så over. Så etter å ha løst for z, kan vi finne y-ene ved å bytte koordinater tilbake ved at $y = Pz$.

Det ble tidligere nevnt at ikke alle matriser er diagonaliserbare, så vi kan ikke bruke denne metoden for å løse (8) for *alle* A. Det fins imidlertid andre matrisedekomposisjoner man kan gjøre, som for eksempel Jordan normal form, også kalt Jordan kanonisk form. Den vil nesten-diagonalisere, og gir en Λ hvor diagonalen fortsatt har egenverdiene til matrisen, men det kan være noen 1-ere på "superdiagonalen", altså rett over diagonalen. Så vidt jeg vet dukker Jordan normal form i TMA4145 LinMet, MA3201 RingMod og TMA4165 DiffSys.

La oss nå se om vi kan få en eksplisitt formel for y. Vi løser for z_i-ene: Siden $z_i' = \lambda_i z_i$ ved (9), så vil

$$z_i(x) = C_i e^{\lambda_i x}$$

for hver i. Vi vet at P sine søyler er egenvektorer til A, så

$$P = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

hvor v_i-ene er søylevektorer, med tilhørende egenverdi λ_i. Vi får da y som

$$\begin{aligned} y(x) &= Pz(x) \\ &= z_1(x)v_1 + \cdots + z_n(x)v_n \\ &= C_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} v_n \end{aligned} \tag{10}$$

som er generaliseringen av formelen dere så i TMA4101.

Merk for øvrig at det vi ser i (10) ser ut som en lineærkombinasjon av vektorer. Sånn sett kan vi si at løsningsrommet til $Dy = Ay$ i vektorrommet $(\mathcal{C}^\infty)^n$ over $\mathbb{R}$ er et vektorrom med basis

$$\{e^{\lambda_1 x} v_1, \quad \cdots, \quad e^{\lambda_n x} v_n\}.$$

Den eksplisitte formelen for 2×2-matriser er som følger: Hvis $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ vil

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 \alpha e^{\lambda_1 x} + C_2 \beta e^{\lambda_n x} \\ C_1 \gamma e^{\lambda_1 x} + C_2 \delta e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

hvor vektoren $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi λ_1, og vektoren $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi λ_2.

7 Referanser

Friedberg, S., Insel, A., & Spence, L. (2014). *Linear Algebra* (4. utg.). Pearson. (Sitert på s. 1, 4).