

## KAPITTEL 28: KILDER TIL MAGNETISKE FELT

- Læringsmål:
- Kunne beskrive mag. felt til en enkelt ledning i beregelse samt en strøm førende ledor
  - Forstå hvordan strøm førende ledere vekselvirker magnetisk.
  - Forstå fysikk-innholdet i Ampères lov og hvordan den kan brukes kvantitativt.
  - ~~Kjenne~~ til de vanligste typene magnetisk respons til materialer.

Fjerne kapitler, vi så hvordan  $\vec{B}$ -felt parisket ledninger - men hvor kommer  $\vec{B}$ -feltet fra og hvordan beskrives vi det matematisk?

### Magnetisk felt til en $q$ i beregelse

Enkleste situasjonen:  $q$  beregnes seg med  $\vec{v}$ .

Dette er grunnlaget for å forstå  $\vec{B}$  produsert av strømførende ledere.

Vi så tidligere at  $|\vec{E}|$  var prop. med  $|q|$  og  $\frac{1}{r^2}$ .

Det samme gjelder  $|\vec{B}|$ : eksperimenter viser at  $|\vec{B}| \propto \frac{|q|}{r^2}$ .

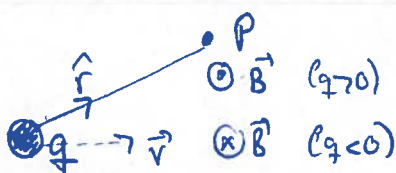
Men retningen til  $\vec{B}$  er ikke  $\parallel \hat{r}$  i motsetning til  $\vec{E} \parallel \hat{r}$ :

retningen er  $\perp$  både  $\vec{v}$  og  $\hat{r}$ . Eksperimenter viser også at

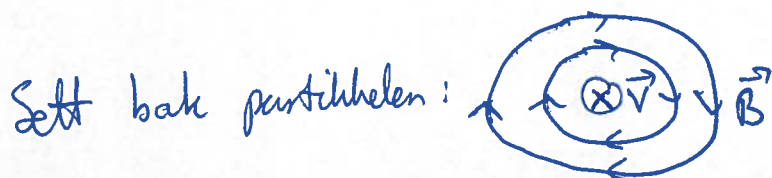
$|\vec{B}| \propto v$ , slik at alt i alt kan i skrive:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

(mag. felt til en pkt-ladning med konstant hastighet)   
 ilde-rel.



Mag. felt i pkt. P generert av ladning  $q$ .



For en gitt  $r$ , er altså  $|\vec{B}|$  størst der hvor  $\hat{r}$  er  $\perp \vec{v}$ .

$\mu_0$  er en konstant prefaktor: magnetisk permeabilitet.

Spiller en liknende rolle som  $\epsilon_0$  (el. permittivitet): kommer tilbake til dette.

$$[\mu_0] = \frac{T \cdot m}{A} \quad (\text{sees fra at } [B] = T)$$

$$\text{og vi har } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

\*  $\vec{B}$  kan viles eksp. ved å se hvilken retning et kompass netter seg inn langs.

dette definerer feltretning. Feltstyrken defineres utfra at den tilfredsstiller

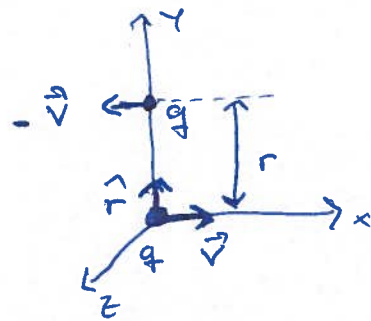
$$F = qvB$$

Legg merke til hvordan feltlinjene for  $\vec{B}$  pøker i helt andre retninger enn de radiale feltlinjene assosiert med  $\vec{E}$ .

For akselererende ladninger er formelen for  $\vec{B}$  mer komplisert: skal ikke se på dette.

**EKSEMPEL** To protoner beveger seg som vist i figuren med samme hastighet  $v \ll c$ . Finn el. og mag.  $\vec{F}$  på det øvre protonet.

( $q = |e|$ .)



Coulomb's lov gir  $F_e$ :

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Mag. kraft gitt ved  $\vec{F}_B = q \cdot (-\vec{v} \times \vec{B})$  hvor

$\vec{B}$  generert av nedre proton er  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$

Siden  $\vec{v} = v\hat{x}$  og  $\hat{r} = \hat{y}$  får vi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \hat{z} \Rightarrow \vec{F}_B = \frac{\mu_0 q^2 v^2}{4\pi r^2} \hat{y}$$

$$\text{Forholdet } \frac{F_B}{F_e} = \frac{\mu_0 v^2}{4\pi \epsilon_0} = \epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \text{ siden } c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Dermed  $F_e \gg F_B$ .

11 Fieldprint.pdf (1)

## Magnetisk felt generert av en infinitesimal leder

For å bestemme  $\vec{B}$ -feltet fra 

brukes vi superposisjons prinsippet.

Totalt  $\vec{B}$ -felt fra flere ladninger i beregelse:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$$

Hvis  $n$  er ladnings tettheten og  $A$  er tverrsnittet (areal) til ledere, har vi at total ladning er:

$$dQ = n \cdot q \cdot A \cdot dl$$

Med en driftshastighet  $v_d$  får vi da. (husk  $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ )

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{|dQ| v_d \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{n |q| v_d A dl \sin \theta}{r^2}$$

Men  $I = n |q| v_d A \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{r^2}$ .

Veliter formen er dermed

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

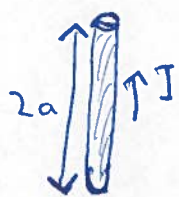
(mag. felt fra leder  $d\vec{l}$ )

Dette er Biot-Savarts lov som så kan brukes til å finne totalt felt ved å integrere over alle segmenter  $d\vec{l}$  som utgjør den fallstendige lederen (som ikke trenger å være rett):

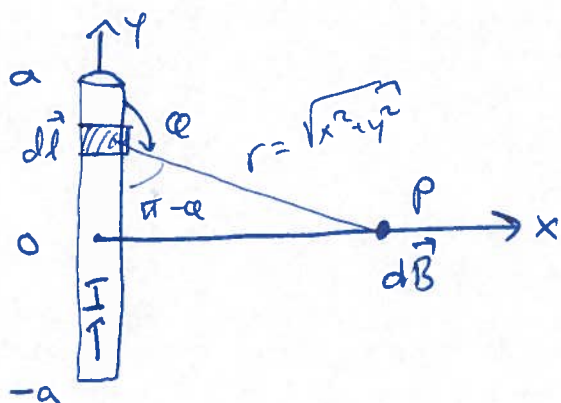
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$\vec{B}$ -felt til en rett strøm førende leder

Tar nå i bruk Biot-Savarts lov for å beregne  $\vec{B}$  fra:



(ekstremt vanlig komponent: diverse kretser, derfor relevant.)



La oss beregne  $d\vec{B}$  i punktet P produsert av  $d\vec{l}$ .

Retning:  $d\vec{B} \sim d\vec{l} \times \hat{r} \Rightarrow \otimes d\vec{B}$  (inn i planet).

Ser nå at  $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{x}{r}$  slik at størrelsen blir gitt ved:

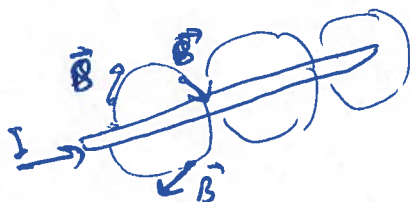
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dy \cdot \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dy \cdot x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Integrerer og får:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2+a^2}}$$

Dersom  $a \gg x$  (lang leder),  
får vi:  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ .

Men vi har en sylindrisk symmetri i problemet (rundt y-aksen)  
 $\Rightarrow B$  har samme størrelse på alle pnt. i en sirkel med  
radius  $r$  ( $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ) og retningen er tangensiell til  
sirkelen overalt.



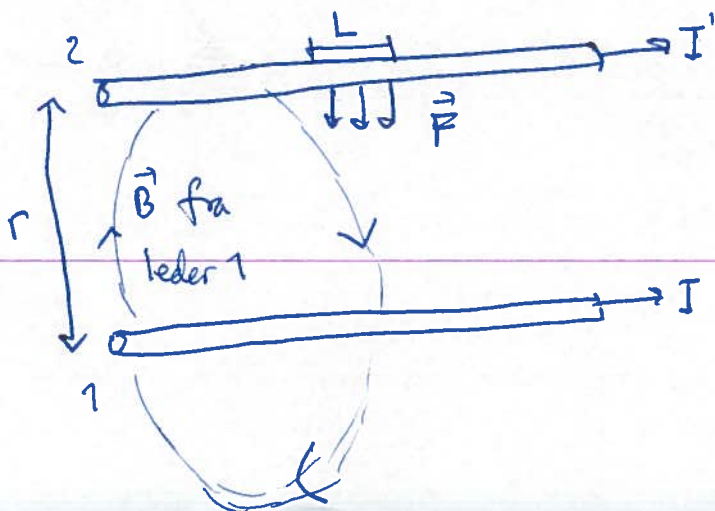
Høyrehandsregel:

legg tummel i retning  
av lederen  $\Rightarrow$

fingerene bøyer seg som  
 $B$ -felt retningen.

### Kraft mellom parallelle ledere

Dersom to rette ledere ligger nært hverandre vil de generelt  
felt v.v. via den magnetiske kraften de utøver på hverandre:  
leder 1 genererer  $\vec{B}$ -felt som virker med kraft på ladningene  
i bevegelse i leder 2 (strømmen). Betrakt følgende oppsett:



Vet at leder 1 produserer et  $\vec{B}$ -felt som i en avstand  $r$  (hvor leder 2 er) har størrelse  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ . Den utøver dermed en kraft på et segment av lengde  $L$ :

$$\vec{F} = I' \vec{L} \times \vec{B} \text{ slik at } \vec{F} \text{ peker nedover: } \underline{\text{attraksjon}}$$

$$\text{Siden } \vec{L} \perp \vec{B} \Rightarrow F = I' L B = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r}$$

Kraft per lengdeenhet er dermed  $\boxed{\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}}$  for to

rette ledere. Samme resonnering viser at leder 2 tiltrekker leder 1 med samme kraft (retning oppover).

Denne avv. mellom to rette ledere danner grunnlaget for selve definisjonen av SI-enheten ampere:

1 A er strømmen som, når den går i jevnt i hver sin leder med tilnærmet uendelig lengde hvor lederne er 1 m fra hverandre, forårsaker hver leder å erføre en kraft på  $2 \cdot 10^{-7}$  N per lengdeenhet.

Verd å merke seg at selv én enkelt leder vil forårsake de ulike delene av lederen å utøve en kraft på de andre delene (attraksjon).

## Magnetisk felt til en sirkuler strømslette

Hva slags  $\vec{B}$ -felt produserer en strøm som går i sirkel istedet for en rett linje? Relevant for strømsletter med flere vindlinger som ofte brukes (f.eks. solenoide type oppsett).

Radius  $a$ . La oss finne  $\vec{B}$ -feltet produsert av sirkelen ( $\vec{B}$ -felt fra de rette lederne med motsatt strøm kansellerer i stor grad hverandre).

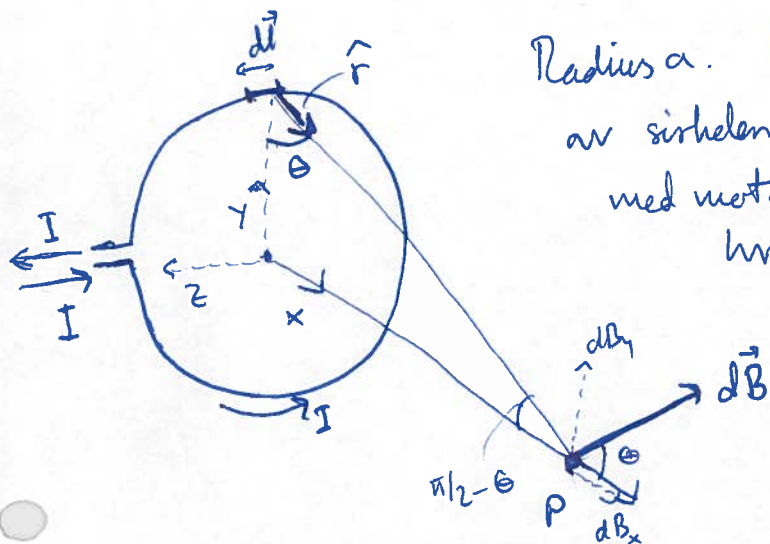


Fig. 28.12

Brukes Biot-Savart lov til å finne bidraget  $d\vec{B}$  fra segmentet  $d\vec{l}$  i pkt. P som ligger en avstand  $x$  fra sirkelen.

$d\vec{l}$  er  $\perp \hat{r}$  samt  $d\vec{l} \parallel \hat{z} \Rightarrow d\vec{B}$  ligger i  $xy$ -planet.

Størrelsen på bidraget er: 
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{r^2}$$

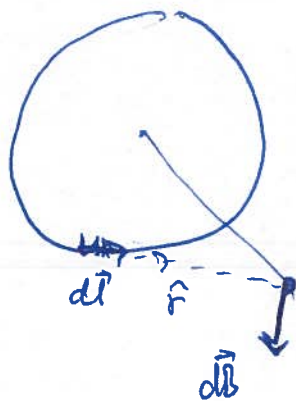
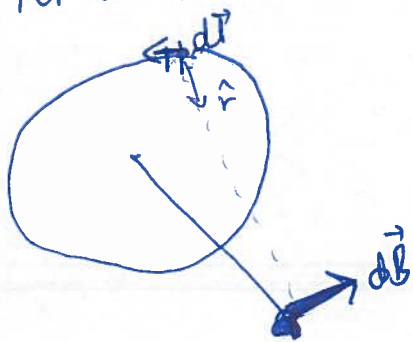
hvor  $r^2 = x^2 + a^2$ .



med komponenter  $dB_x = dB \cdot \cos \theta$  og  $dB_y = dB \cdot \sin \theta$ .

Fra figuren ser vi at  $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ ,  $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ .

For å finne totalt felt ser vi først at  $B_y$  må være null:



Motsatte segmenter gir motsatt rettet  $dB_y \Rightarrow \sum dB_y = 0$ .

Dermed vet vi at  
retningen er:  $\rightarrow$



Størrelsen på x-komp.  
finder vi ved å integrere over  
hele sirkelen.

$$B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

(siden  $|dl \times \hat{r}| = a dl$ )

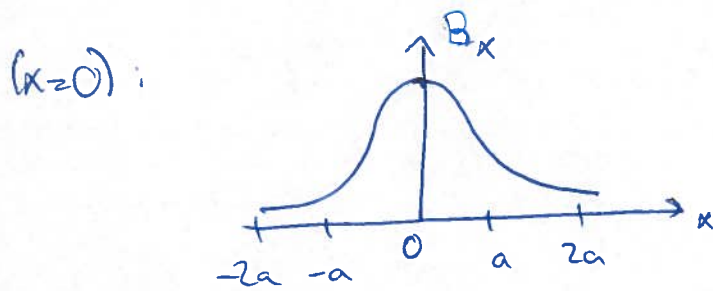
$$= \frac{\mu_0 I a}{4\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \int_{2\pi a} dl \Rightarrow$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

(Magnet felt  
produert av  
sirkulær strømsløyfe  
i avstand x)

Retning på  $\vec{B}$  gitt av h.h.r.: høy fingre i I-retning, så  
peker tommelen langs  $\vec{B}$ .

Har vi  $N$  løkker med negligerbar tykkelse i forhold til  
 avstanden  $x$  til  $P$ , kan de betraktes som én sløyfe med strøm  
 $N \cdot I$ . Ser at  $B$ -feltet er sterkest i midten av strømsløyfen



Men at vi kan også uttrykke  $B_x$  via det magnetiske momentet  
 til den sirk. strømsløyfen. Har vist at  $\mu = IA$  og  $A = \pi a^2$ .

Dermed 
$$B_x = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Tidligere så vi altså hvordan mag. moment  $\vec{\mu}$  responderer på  
 tilstedeværelsen av et ytre felt  $\vec{B}$  (dipolmoment osv.), men har  
 altså nå sett hvordan  $\vec{\mu}$  i seg selv er en kilde til  $\vec{B}$ -felt.

### Ampères lov

Vår strategi har vært å finne bidraget  $d\vec{B}$  fra et lite strømelement  
 og så summere (integre) bidragene; helt analogt hvordan vi fant  
 totalt  $\vec{E}$ -felt fra ladnings elementer tidligere.

Det var praktisk nyttig å bruke Gauss lov for å finne  $\vec{E}$  i situasjoner med høy symmetri slik at  $\iint \vec{E} \cdot d\vec{A}$  kunne utføres, og så isolere bidraget fra  $|\vec{E}|$  på en side av likningen.

Tilsvarende lov for magnetiske felt: Ampères lov.

Nyttig for symmetriske strømfordelinger.

Ampères lov, i motsetning til Gauss lov, benytter seg av et linjeintegral  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  rundt en lukket vei.

Betrakt følgende situasjon:



Utledet tidligere at  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  i avstand r.

Siden  $\vec{B} \parallel d\vec{l}$  i figuren har vi at  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int dl = \mu_0 I$ .  
(vi går rundt mot klokken)

(Merk at dersom vi integrerer i motsatt retning (med klokken) er

$\vec{B} \perp -d\vec{l}$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I.$$

[Integrasjonsretning definerer pos. strøm i følge h.h.r.]

Det bemerkelsesverdige er at integralet  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  er uavhengig av om  $I$  er sentrert i sirkelen og til og med om vi bruker en annen vei som ikke er sirkulær:



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Dette er på samme vis som Gauss lov for  $\vec{E}$ -felt: det eneste som betyr noe er at  $I$  er innesluttet i integrasjonsløkken.

Beviset gis i lærebok s. 936. Ampere's lov generelt er der:

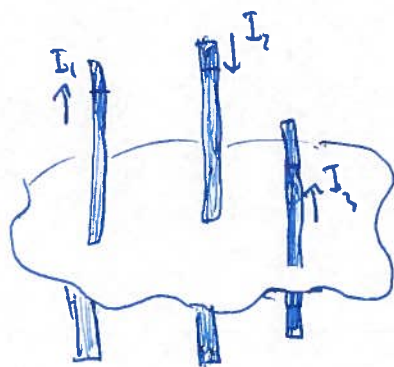
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{end}}$$

( $I_{\text{end}} = \sum_i I_i$ ; hvor  $I_i$  er strømmer inne sluttet av int. vei)

Husk at h.h.r. bestemmer hvorvidt  $I_i$  er positiv eller ikke.

Hvis "fittet current"  $\int \vec{j} \cdot d\vec{A}$  har vi  $I_{\text{end}} = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$ .

EKSEMPEL



Integrasjonsretning	Fortegn
	$I_1 > 0, I_2 < 0, I_3 > 0$
	$I_1 < 0, I_2 > 0, I_3 < 0$

Merke at  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$  betyr ikke nødvendigvis at  $\vec{B} = 0$  overalt langs integrasjonsvei: det betyr bare at total strøm  $I_{\text{end}}$  gjennom integrasjonsvei er null.

Merke at  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  er ikke relatert til arbeidet utført av mag. krefter i motsetning til  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  (siden  $\vec{E} = -\nabla V$ )

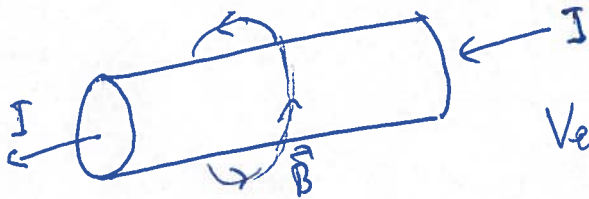
Mag. krefter er  $\perp \vec{B}$  ( $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ ), i motsetning til  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ .

Elektrisk kraft (konservativ) avhenger kun av posisjonen til partikkelen, mens mag. kraft avhenger av hastigheten i tillegg.

Ampères lov gyldig for konstante strømmer. Skal se i kap. 29 hvordan den generaliseres når felds avhengige felt er til stede.

La oss se på bruk av Ampères lov i praksis.

**EKSEMPEL** Felt fra en lang, sylindrisk leder. Radius  $R$  og uniformt fordelt strøm  $I$  over tverrsnittet. Finn  $B(r)$  for alle  $r$ .



Vet at  $\vec{B}$ -felt linjene er konsentriske

sirkler. Bruker Ampères lov med en sirkulær integrasjonsvei.

Siden  $|\vec{B}|$  er den samme på hvert pkt. i sirkelen pga. sylinder-symmetri og strøm tettheten er  $J = I/\pi R^2 \Rightarrow$

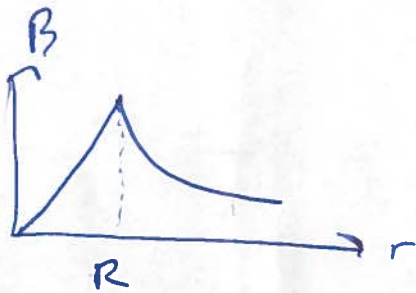
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$  gir da for en sirkel med radius  $r$ :

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I \cdot \pi r^2 = \mu_0 I \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{så lenge } r < R.$$

$$\text{Dermed } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2} \quad \text{for } r < R.$$

Dersom integrasjonsveien er en sirkel med  $r > R$  er alltid

$$I_{\text{enc}} = I, \text{ slik at } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{for } r > R.$$



På samme måte som vi fant at  $\vec{E}$ -feltet utenfor en symmetriske ladet struktur større

var det samme som om all ladningen

var konsentrert i midten, finner vi her at  $\vec{B}$ -feltet utenfor

en sylinder-symmetriske strøm-distribusjon er det samme som om

all strømmen var konsentrert i sylinderaksen.

## Magnetiske materialer

Så langt har vi diskutert hvordan strømmer i vakuum skaper  $\vec{B}$ -felt.

Men strøm sløyfer i transformatorer, motorer og generatorer heffinner seg nesten utelukkende i nærheten av magnetiske materialer (f.eks. jern)

som bidrar til å forsterke  $\vec{B}$ -feltet.

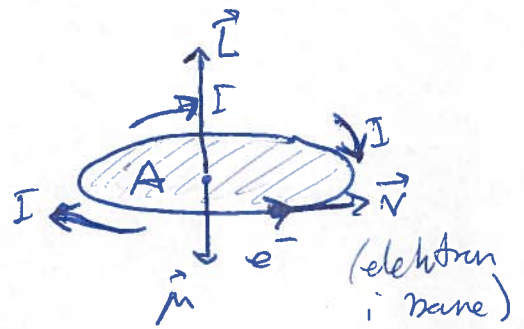
La oss derfor undersøke noen egenskaper til magnetiske materialer, opprinnelsen til magnetismen og introdusere tre typer magnetisk oppførsel som fremmes:

- Paramagnetisme
- Diamagnetisme
- Ferromagnetisme

(finnes flere former; AFM, ferri, ++)

Vi har sett at strømmer gir opphav til mag. mom.  $\vec{\mu}$ .

Når  $e^-$  i et materiale beveger seg rundt et atom skaper den dermed et mikroskopisk  $\vec{\mu}$ . Forenklet medell:



Vet at  $\mu = IA$  og  $A = \pi r^2$  for en  $e^-$ -bane

med radius  $r$ .  $e^-$  bruker en tid  $T = \frac{2\pi r}{v}$

på å fullføre én runde, slik at strømmen blir  $I = \frac{e}{T}$ .

$\Rightarrow \mu = \frac{ev}{2\pi r} (\pi r^2) = \frac{evr}{2}$ . Men dreiemomentet  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

er  $L = mrv$ , slik at  $\boxed{\mu = \frac{e}{2m} \cdot L}$

Kv. mek. behandling gir at  $e^-$  ikke går i deterministisk bane rundt atom, men den har like fullt et dreiemoment  $\rightarrow$

I kvantemekanikk vil dere lære at  $L$  er en kvantisert størrelse: det betyr at den kun kan ta bestemte (diskrete) verdier.

Mer bestemt kan komponentene av  $\vec{L}$  kun ta verdier  $L_j = m\hbar$  hvor  $m$  er et heftall og  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

$h \equiv$  Planck's konstant og  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ .

I atomiske systemer representerer  $\hbar$  en fundamental enhet for dreiemoment på samme vis som  $e$  er den fundamentale enheten for ladning. Siden  $\mu = \frac{e}{2m} L$  betyr dette at  $\frac{e\hbar}{2m}$  er den fundamentale enheten for mag.-moment. Definerer:

$\mu_B \equiv$  Bohr magneton  $= \frac{e\hbar}{2m} = 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$ .

Et annet sentralt bidrag til total  $\vec{\mu}$  i et materiale utøves mag. mom. produsert av den orbitale bevegelsen til  $e^-$  er spinnet til elektronet. Lærers om dette; QM: "intrinsisk egenskap til  $e^-$  (akkurat som ladning), usk. av bevegelse.

Spinn er også en dreiemoment som for  $e^-$  har en størrelse  $\mu_B$ .

Total  $\vec{\mu}$  til et materiale kommer dermed av i hvilken grad  $\vec{\mu}_L$  og  $\vec{\mu}_S$  til samtlige  $e^-$  peker i samme retning. I et ikke-mag. materiale peker de i vilkårlige retninger slik at  $\vec{\mu}_{\text{tot}} \approx 0$ .



## Paramagnetisme

Dersom  $\vec{\mu}_i = (\vec{\mu}_{L,i} + \vec{\mu}_{S,i})$  ikke summerer opp til eksakt null for et atom  $i$ , så vil et ytre felt  $\vec{B}$  utøve et dreiemoment  $\vec{\tau}_i = \vec{\mu}_i \times \vec{B}$  på atomet  $\Rightarrow \vec{\mu}_i$  innrettes seg langs  $\vec{B}$  og

forsterker dermed det totale mag. feltet.

Uten  $\vec{B}$ -felt er alle atomers  $\vec{\mu}_i \neq 0$  ikke innrettede seg.

temisk stoff 

$\Rightarrow$  null nett  $\vec{\mu}_{tot}$

Mer spesifikt så er det indre mag. feltet generert av materialet prop. med  $\vec{\mu}_{tot}^*$ . Vi definerer magnetiseringen

til et materiale som:

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}_{tot}}{V}$$

Det totale feltet i materialet er da  $\vec{B} = \vec{B}_{ytre} + \mu_0 \vec{M}$

hvor  $\mu_0$  er mag. permeabilitet.

Materiale som oppfører seg som beskrevet: paramagnetisk.

Gir opphav til et  $\vec{B}$ -felt som er en faktor  $K_m$  større enn  $\vec{B}_{ytredene}$ :  $K_m =$  relativ permeabilitet. For vanlige faste og flytende stoffer ved rom-T, er  $K_m$  veldig nær 1 (opp til 1.003).

\*  $\vec{\mu}_{tot} = \sum_i \vec{\mu}_i$  hvor  $\vec{\mu}_i$  er mag. mom. til atom  $i$ . Grunnen til at  $\vec{\mu}_i \neq 0$  kan være at det finnes uparrede  $e^-$  i atomorbitaler som har ukompenserte spin.

Antallet fra 1 kalles magnetisk susceptibilitet  $\chi_m$ :

$$\chi_m = K_m - 1$$

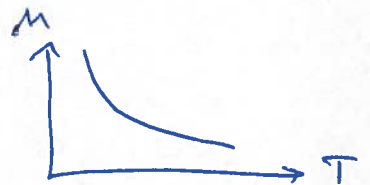
Alle ligninger vi har sett på i dette kapitlet hvor strømslukker generer mag. felt er gyldige også dersom strømløperne er innsluttet i et paramagnetisk materiale dersom vi bytter ut  $\mu_0 \rightarrow \mu$

hvor  $\frac{\mu}{\mu_0} = K_m$  (derfor heter den rel. perm.) ( $K_m \equiv \mu_r$ ).

$\mu$  er da permeabiliteten til materialet.

Merket  $\chi$  antar med økende temp. siden termisk energi har en tendens til å få mag. moment til å peke i vilkårlige retninger:

i mange tilfeller har vi  $M = C \cdot \frac{B}{T}$



hvor  $C$  er en materialarhengig konstant (Curie konstanten).

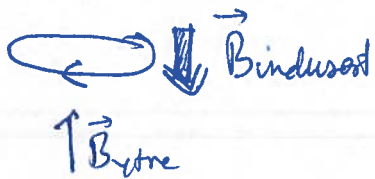
Denne relasjonen kalles Curie's lov.

Paramag. mat.:  $\chi_m > 0$ . Men for diamagnetiske materialer,

som vi nå skal se på, er  $\chi_m < 0$ .

## Diamagnetisme

I noen materialer er  $\vec{\mu}_i = 0$  uten noe felt, men selv disse materialene fremviser en magnetisk respons fordi at et påtrykt felt kan indusere strømmer (sløyfer) analogt hvordan vi har sett at et  $\vec{E}$ -felt kan indusere el. dipoler i et materiale med  $q_{ext} = 0$ .



Indusert felt motsatt til ytre felt: statisk effekt i motsetning til neste kapittel - Faradays induksjonslov)

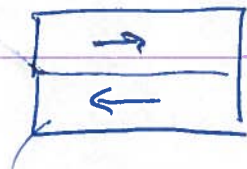
Slike materialer, som aldri genererer en intern magn.  $\vec{M}$  motsatt  $\vec{B}_{\text{ytre}}$ , er diamagnetiske  $\Rightarrow \chi_m < 0$  ( $K_m \approx 1$ , f.eks. 0.999).

Mye nærmere T-ark. enn paramag. suscept.  $\chi_m$ . Opprinnelse krever mer kompliserte beregninger, ser ikke på det her (kv. med beh. av Lorentz-kr.).

## Ferromagnetisme

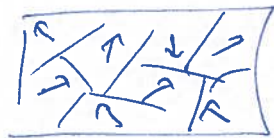
I slike materialer (f.eks. Fe, Co, Ni) eksisterer det en sterk vek. (av krantemel. opprinnelse) mellom  $\vec{\mu}_i$  til atomene som får de til å spontant innrette seg parallelt med hverandre (dvs. uten  $\vec{B}_{\text{ytre}}$ ). Det er  $\vec{\mu}_0$  som er det sentrale bidraget i dette tilfellet.

Mer spesifikt ordner  $\vec{\mu}_i$  seg parallelt i domener



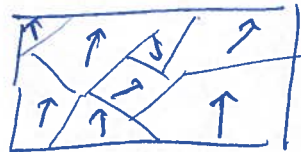
alle  $\vec{\mu}_i$  peker  $\leftarrow$ .

Kan finnes mange domener og uten  $\vec{B}_{\text{ytre}}$  peker de stort sett i ulike retninger  $\rightarrow$  svak nett  $\vec{M}$ .



Sett på  $\vec{B}_{\text{ytre}}$ : domeneene begynner

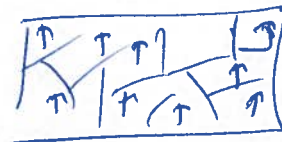
å vinnrette seg langs  $\vec{B}_{\text{ytre}}$  og endre størrelse:



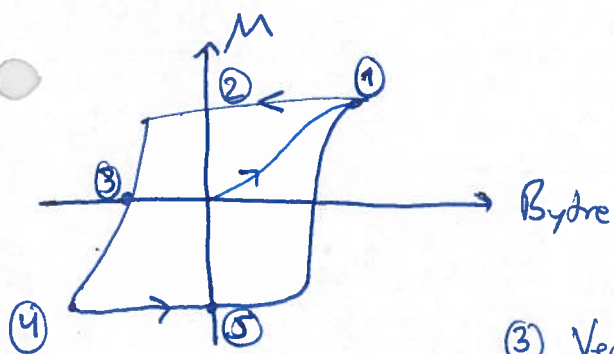
Denne: 

$K_m \gg 1$  (1000 - 100000) for ferromagneter, mye sterkere magnetisering enn paramag. mater.

Merkt at for sterkt nok  $B_{\text{ytre}}$  mettes  $M$ : alle domener peker i samme retning.



FM materialer fremviser hysterese som illustreres her



① Materialet er metningsmagnetisert via sterkt  $B_{\text{ytre}}$ .

② Når vi styrer med  $B_{\text{ytre}}$ , gjentår magnetisering selv ved  $B_{\text{ytre}} = 0$ .

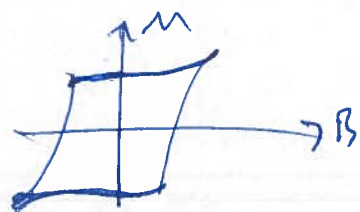
③ Ved sterkt nok  $B_{\text{ytre}}$  i motsatt retning tringes  $M = 0$ .

④ Fortsetter vi å øke  $B_{\text{ytre}}$  i motsatt retning oppnår vi metning langs  $\vec{B}_{\text{ytre}}$  igjen.

⑤ Øker vi  $B_{\text{ytre}}$  begynner syklusen igjen.

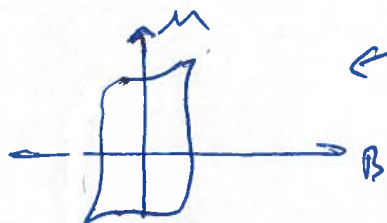
Når materialet magn. og demagn. under hysteresen, går det tabt magn. energi som fører til en opvarmning af temp. til materialet.

Bredden på hysteresekurven angiver hvilket formål ferromagneten egner sig til:



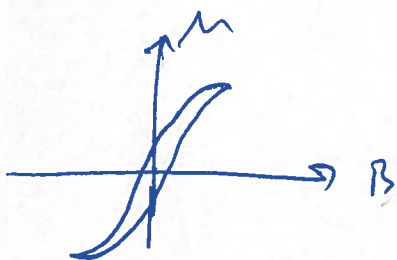
← Forblir stærkt magnetiseret selv ved  $B=0$  og kræver stort felt for at demagn. ( $M=0$ ), dvs. bred hysteresekurve  $\Rightarrow$  egner sig godt

som permanent magnet.



← Smalere kurve: lettere at magn. / demagn.

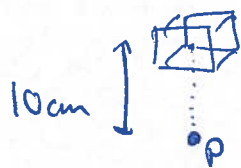
$\Rightarrow$  egner sig som materiale for dataminne.



Smal kurve og lav restmagnetisering ved  $B=0 \Rightarrow$  egner sig til transformator materiale hvor svakhystereser er ønskelig (mindre tab af energi (opvarmning af materialet)).

**EKSEMPEL**

En kubisk FM har magnetisering  $M = 8 \cdot 10^5 \text{ A/m}$ .



Hver side er 2 cm. Førm mag. dipol moment samt  $|\vec{B}|$  (estimeret) 10 cm fra center til kuben.

Siden  $M = \frac{M_{\text{tot}}}{V} \Rightarrow \underline{M_{\text{tot}} = 8 \cdot 10^5 \text{ A/m} \cdot (2 \cdot 10^{-2} \text{ m})^3 = \underline{6 \cdot \text{Am}^2}}$ .

Mer tidligere vist at for en strømslyfte med radius  $a$ , så er i en afstand  $x$  fra midten:

$$B = \frac{\mu_0 M_{\text{tot}}}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Siden vi ser på et pkt. mye lengre unna enn størrelsen på kuben ( $x \gg a$ ), kan vi som en approksimering bruke dette uttrykket til å estimere  $B$ :

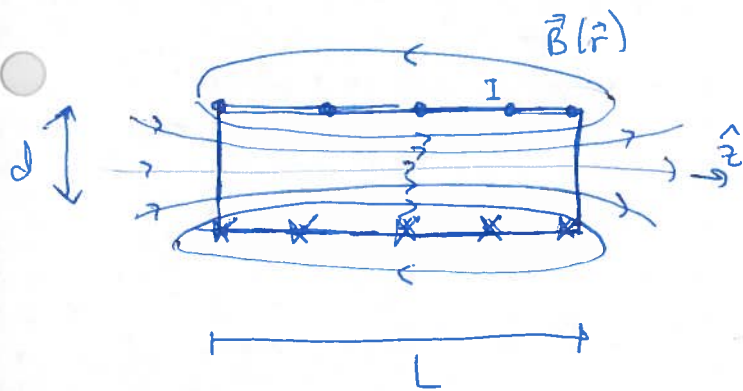
$$\underline{B \approx \frac{\mu_0 M_{\text{tot}}}{2\pi x^3} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ T} = \underline{10 \text{ G}}}$$

(ca.  $10 \times$  jordens magnetfelt).

Merkt vi brukte  $\mu_0$  (perm. for vakuum) siden vi beregnet

$B$  utenfor materialet. Hadde vi beregnet  $B$  inni måtte vi brukt  $\mu = K\mu_0$  som er  $\gg \mu_0$  for et FM materiale.

# $\vec{B}$ -felt til solenoide



Kvalitativ skisse av feltlinjer for endelig solenoide.

La oss nå vise at for  $L \rightarrow \infty$ ,

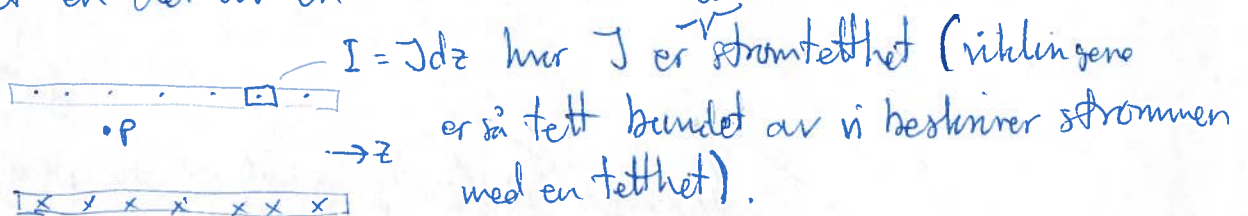
vil  $B=0$  utenfor og  $B = \text{konst} \neq 0$  inni. Dette

resultatet kan da brukes som en approksimasjon for en lang solenoide, så lenge en holder seg unna kantene.

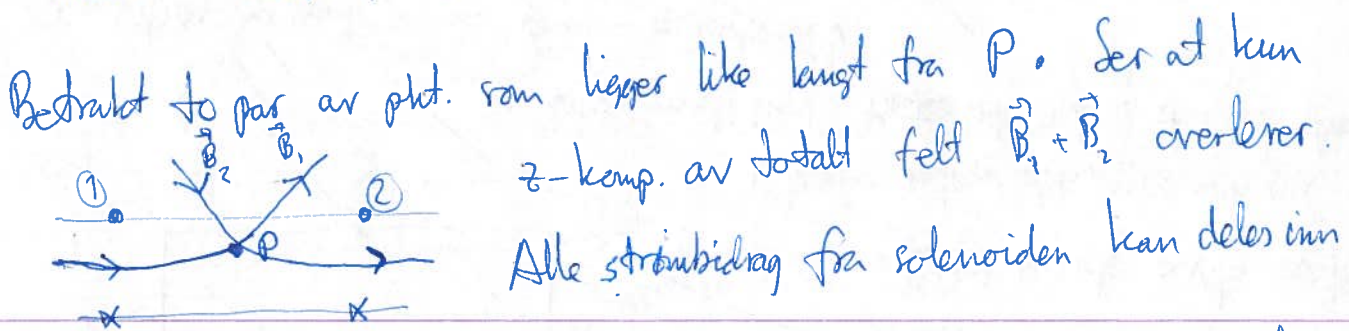
Hvis vi har en uendelig lang solenoide, må  $\vec{B} \parallel \hat{z}$  pga. symmetri.

Dette gjelder både inni og utenfor solenoiden. For å se dette,

betrakt en del av en slik solenoide: linear



Betrakt punktet P som ikke ligger på senteraksen generelt. Bidraget til  $\vec{B}$  i P fra strømmen rett over og under P vil peke langs  $\hat{z}$  (høyrehåndsrregel). Hva med bidraget fra alle andre punkter?



i par på denne måten og kun z-komp. overlever uansett om P ligger inni eller utenfor  $\Rightarrow \vec{B} \parallel \hat{z}$ .

$V_i$  har vist at  $B \parallel \hat{z}$  overalt, men  $\mu_0 J$  med Telvisyonen:

Lag en Ampersk-løkke utenfor:



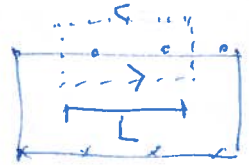
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (\text{ingen tidsavhengige felt } \vec{E})$$
$$= 0 \quad \Rightarrow |B(x_2)| \cdot L - |B(x_1)| \cdot L = 0$$

( $B$  må være uavh.  $z$  for en uendelig lang solenoide)

Derfor  $\vec{B} = \text{konst. utenfor solenoide}$ . Men burde ha  $\vec{B} = 0$

langt unna solenoiden ( $x_2 \rightarrow \infty$ ). Derfor  $\vec{B} = 0$  overalt utenfor!

Samme løkke inni solenoiden  $\Rightarrow \vec{B} = \text{konst. innenfor}$ . Hva er denne konstanten? Finner ut med løkke



Ser at  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{in} \cdot L = \mu_0 J \cdot L$

$$\Rightarrow \underline{B_{in} = \mu_0 J \hat{z}}$$

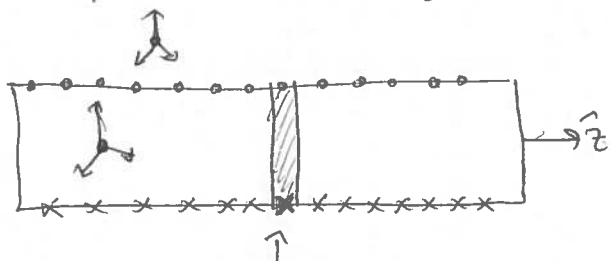
Konklusjon: uendelig lang solenoide har  $B=0$  utenfor og  $\vec{B} = \mu_0 J \hat{z}$  innenfor (uniformt felt).

Hva med Biot-Savarts lov? Vet at  $d\vec{B} \sim Id\vec{l} \times \hat{r} / r^2$  fra et strømlement  $d\vec{l} \Rightarrow$  feltbidrag divergerer når  $r \rightarrow 0$ . Hvordan kan felt innenfor solenoide være like sterkt rett ved kanten som i midten i lys av dette? Eneste måte å finne ut med sikkerhet er å finne totalt felt ved å integrere Biot-Savart. Merk at vårt resultat

~~$\vec{B} = \mu_0 J \hat{z}$  burde være eksakt for en uendelig lang solenoide; har ikke gjort noen approksimasjoner  $\Rightarrow$  Biot-Savart burde gi identisk resultat!~~



La oss sjekke. La origo i koordinatsystemet ligge i punktet  $I$  hvor vi ønsker å finne  $\vec{B}$ -feltet og la solenoiden ligge langs  $\hat{z}$ -aksen:



"Skive" av solenoiden som ligger i en avstand  $z$  fra  $xy$ -planet med tykkelse  $dz$ .

Magnetfelt-bidraget fra skiven er:

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 J dz}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$

$$= -\frac{\mu_0 J dz}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Merk at  $I = J dz$  er strømmen som går i skiven og vi har

et ekstra minustegn i Biot-Savart. Hvorfor? Fordi at  $\vec{r}$  i formelen ovenfor er koordinat til kilden ikke plot. vi evaluerer feltet i  $I$ -oppriemelig Biot-Savart var jo  $\vec{r}$  koordinat til plot. og kilden var i origo. Derfor:  $\vec{r} \rightarrow (-\vec{r})$ .

Vi kan modellere skiven ved å skrive  $\vec{r} = \vec{l} + z\hat{z}$  hvor  $\vec{l}(\lambda)$  beskriver en parametrisert kurve i  $xy$ -planet (f.eks.  $\vec{l} = \cos\lambda \hat{x} + \sin\lambda \hat{y}$  for en sirkulær skive,  $\lambda \in [0, 2\pi]$ ). Siden  $\vec{l} \perp \hat{z}$  har vi

$r = \sqrt{l^2 + z^2}$  slik at  $d\vec{B}$  blir:

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 J dz}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times (\vec{l} + z\hat{z})}{(l^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\mu_0 J dz}{4\pi} \left[ \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{l}}{(l^2 + z^2)^{3/2}} + z \oint \frac{d\vec{l} \times \hat{z}}{(l^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

For å finne totalt magnet felt  $\vec{B}$  må vi integrere over alle  $z$  (alle skiver). Det andre leddet forsvinner når vi utfører  $\int_{-\infty}^{\infty} dz$

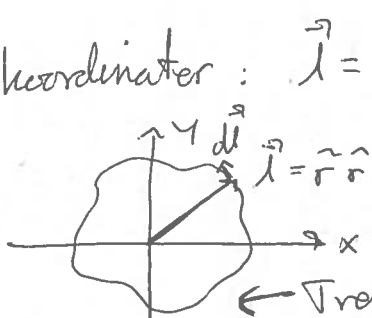
siden det er antisymmetrisk i  $z$ . Integralet over det første gir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(l^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2}{l^2} \quad \text{Da står vi igjen med:}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 J}{2\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2} \quad \text{La oss skrive } \vec{r} \text{ (som vi}$$

rest ligger i xy-planet) i polar koordinater:  $\vec{r} = \tilde{r} \hat{e}_r$

$$\text{og } d\vec{l} = d\tilde{r} \hat{e}_r + \tilde{r} d\phi \hat{e}_\phi$$



← Tverrsnitt av solenoiden; må ikke være sirkulær.

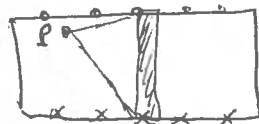
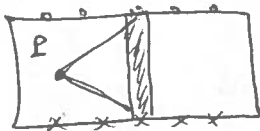
Da finner vi at:

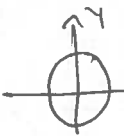

$$-d\vec{l} \times \vec{r} = +\tilde{r}^2 d\phi \hat{e}_z, \text{ slik at}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \hat{e}_z \oint d\phi \quad \text{Vi er nesten i mål. Det gjenstående}$$

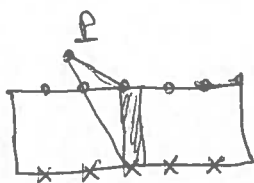
er å legge merke til at  $\oint d\phi$  blir forskjellig avhengig av om punktet P (hvor vi vil evaluere feltet  $\vec{B}$ ) ligger i eller utenfor solenoiden.

P inni solenoiden:



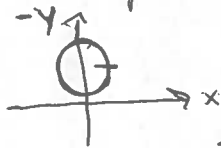
Kurven  $\vec{l}(\lambda)$  omslutter i begge tilfeller punktet P. Dermed blir integralet alltid  $2\pi$ :  eller  endres  $\phi$  med  $2\pi$  i begge tilfeller.

P utenfor solenoiden:



Kurven  $\vec{l}(\lambda)$  omslutter ikke punktet P og da blir

integralet  $\oint d\phi$  alltid like null!

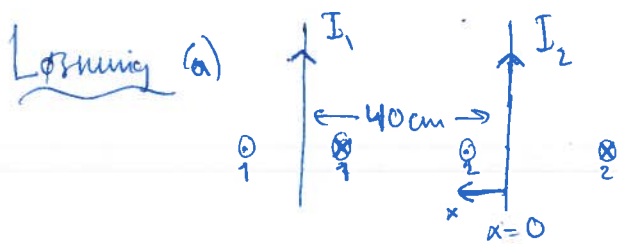


Hver øker  $\phi$  først, men minker så når vi nær punktet - på sirkelen: total-endring er 0!

Dermed: 
$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 J \hat{e}_z & \text{for } P \in \text{in} \\ 0 & \text{for } P \in \text{out.} \end{cases}$$

EKSEMPEL (28.61; 4F) [slutteks. kap. 28].

Two long, parallel wires are separated by 40 cm and carry a current of 25 A and 75 A. Find all positions where  $\vec{B} = 0$  if the currents flow (a) in the same direction and (b) in opposite directions.

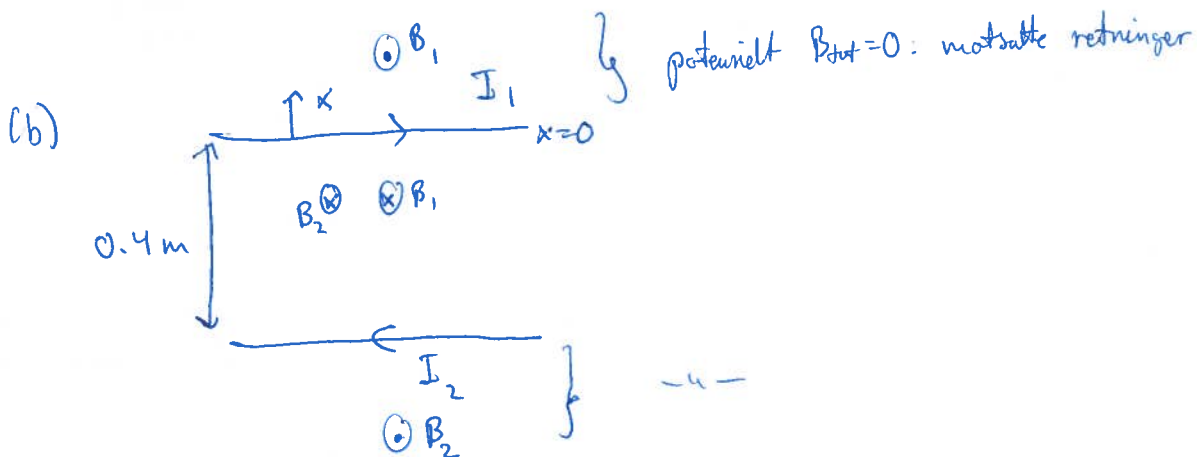


Vet at for lang, strømførende leder har vi at  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  og retning  $\vec{B}$  bestemt av h.h.r.

La  $I_1 = 25\text{ A}$  og  $I_2 = 75\text{ A}$ .  $\vec{B}_{\text{tot}} = 0$  kun mellom ledene, dermed  $|B_1| = |B_2|$  mellom  $x = -0.4\text{ cm}$  og  $x = 0$  gir  $B_{\text{tot}} = 0$  siden det kun er i denne regionen at feltene  $\vec{B}_1$  og  $\vec{B}_2$  peker i motsatt retning.

Får da:

$$\frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(0.4-x)} \Rightarrow I_2(0.4-x) = I_1 x \Rightarrow \underline{\underline{x = 0.3\text{ m}}}$$



Men siden  $I_1 < I_2$  må vi være nærmere leder #1 enn #2 for å kunne håpe å oppnå  $B_1 = B_2$  siden  $B_i \sim I_i$ . Kan kanskje overs begge ledene.

Får da:

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(0.4\text{m} + x)} \Rightarrow \underline{\underline{x = 0.2\text{m}}}$$

# KAPITTEL 29: ELEKTROMAGNETISK

## INDUKSJON

### Læringsmål:

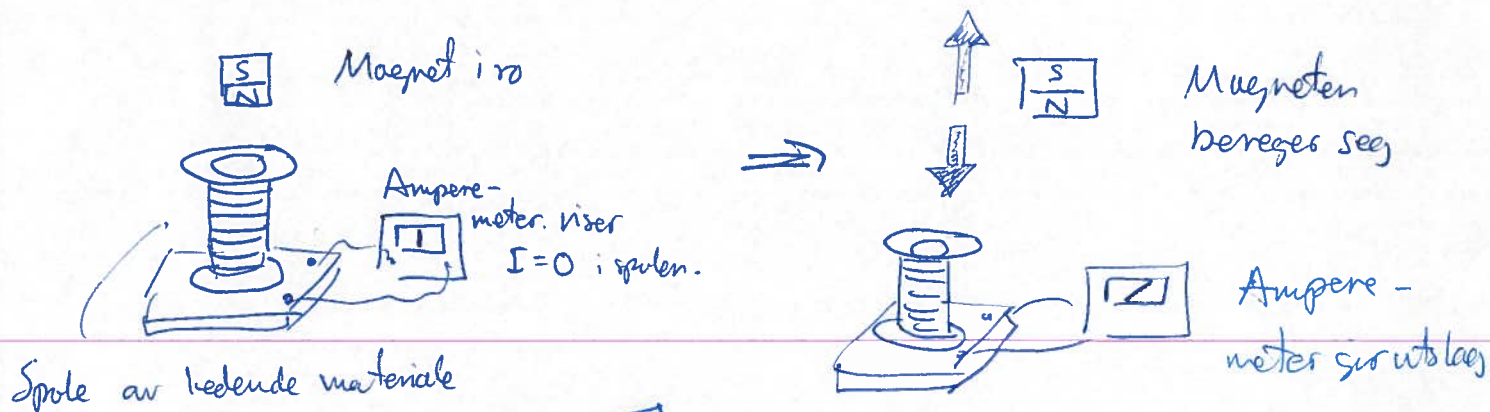
- Lære om Faraday's lov og Lenz lov
- Forstå relasjonen mellom induisert EMS og magnetisk felt / flukes
- Lære om Maxwell's likninger og forstå hva de uttrykker fysisk.

### Induksjons-eksperimenter

De grunnleggende eksp. som viste at det er en sammenheng mellom et tidvarierende  $\vec{B}$ -felt og en induisert EMS

(som kan si opphav til en el. strøm) ble gjort rundt 1830 av

M. Faraday og J. Henry. Ideen illustreres her:



I denne typen eksperimenter observerer en følgende:

- Når magneten er i ro, er  $I=0$  uansett hvor sterkt  $B$ -feltet er.
- Dersom  $B$  endres (f.eks. ved å flytte magneten), induiseres en strøm i spolen. Strømmen er sterkere jo raskere  $B$ -feltet endrer seg

- En endring i enhver av disse størrelsene fører til en induisert strøm  $I$ : størrelsen  $B$ , retningen  $\vec{B}$ , posisjonen til feltet.

Oppsummeres i at når fluksen  $\Phi$  gjennom spolen endres

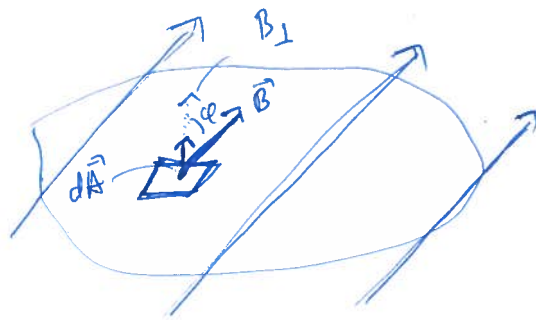
(dvs.  $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$ ), induiseres en strøm. Slike induerte EMS

- er av praktisk stor betydning, f.eks. i elektriske generatorene som vi skal se mer på snart.

Merkt at vi har nå å gjøre med elektrodynamiske (ikke elektrostatiske) krefter siden en tidsvariasjon er essensiell.

# Faradays lov

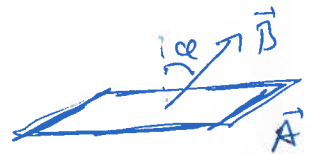
Minner her om konseptet magnetisk fluks. Betrakt en vilkårlig flate



- Magnetisk fluks  $d\Phi_B$  gjennom areal  $d\vec{A}$  er:  $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B dA \cos \phi$

Total fluks  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ .

Der som arealet er flatt:  $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos \phi$



[ $n$  velges selv retning (av to mulige) for  $d\vec{A}$ , men vi holder oss til dette valget i etterkant].

Faradays lov er:

Den induerte EMF'en i en lukket strømsløyfe er minus den tidsderiverte av mag. fluks gjennom sløyfen:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$


Skal straks diskutere fortegnet - først et eksempel.

### EKSEMPEL

$\vec{E} + \vec{B}$ -felt er vanlig uniformt, men øker i styrke med  $0.02 \text{ T/s}$ .

$\vec{B}$ -feltet gir opphav til en fluks gjennom en ledende sløyfe med areal  $A = 120 \text{ cm}^2$  med total resistans  $R = 5 \Omega$ .

Finn størrelsen på induisert  $\mathcal{E}$ MS og strøm. Hva skjer hvis sløyfen byttes ut med et isolerende materiale?

Løsning:  Velger  $\vec{A} \parallel \vec{B}$ ;  $\vec{B} \cdot \vec{A} = BA$ .

$$\text{Dermed } \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt} \cdot A = 0.02 \text{ T/s} \cdot 0.012 \text{ m}^2 = 0.24 \text{ mV} = |\mathcal{E}|$$

$$\text{Strøm: } I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2.4 \cdot 10^{-4} \text{ V}}{5.0 \Omega} = 0.048 \text{ mA}.$$

Siden Faraday's lov ikke er avhengig av  $R$  på noe vis, er  $\mathcal{E}$  den samme for isolator. Men  $I \rightarrow 0$  siden  $R \rightarrow \infty$ .  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ .

( Merk at for å bruke Ohm's lov her ( $I = \frac{V}{R}$ ) uten et kvenseradiert felt, må vi skrive  $I = \frac{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}{R}$  som når integralet tas over hele løopen og  $R$  er resistansen til hele løopen gir  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ . )



## Fortegnet til industert $\mathcal{E}$

For å forstå fortegnet til  $\mathcal{E}$ : dersom  $\mathcal{E}$  industerte en strøm som i sin tur skapte et  $\vec{B}$ -felt i  samme  retning som det påtrykte feltet, vil jo det føre til at  $\mathcal{E}$  øker ytterligere siden  $\frac{d\Phi_B}{dt}$  fortsetter å øke  $\Rightarrow$  uendelig strøm og brudd på energi bevarelse.

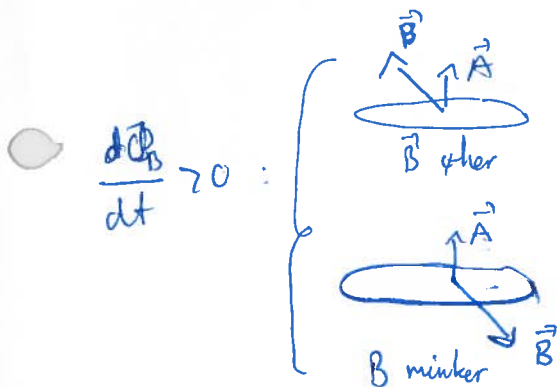
Analyseres dette nærmere i neste seksjon (Lenz lov), men argumentet

- viser at energibevaring dikterer at industert  $\mathcal{E}$  (og dermed strøm) må ha en bestemt retning.

Proseduren:

1) Definer retning for  $d\vec{A}$ .

2) Bestemt fortagnet til  $\frac{d\Phi_B}{dt}$  ut fra  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ .



3) Bestem fortagnet til  $\mathcal{E}$  ut fra  $-\frac{d\Phi_B}{dt}$ .

4) Til slutt: bestem retning til  $\mathcal{E}$  via h.k.r  $\Rightarrow$  tommel langs  $\vec{A}$  og

høy fingrene. Dersom du i 3) fant at  $\mathcal{E} > 0$ , går strømmen i fingrenes retning - dersom  $\mathcal{E} < 0$ , går strømmen i motsatt retning.

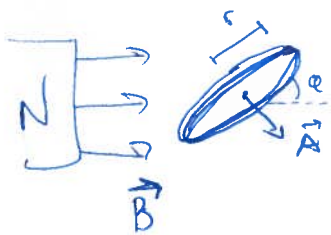
På denne måten skaper  $\mathcal{E}$  en strøm som i sin tur genererer et magnetfelt som peker i motsatt retning av endringen  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  som forårsaket strømmen, slik vi har sett er nødvendig.

NB! Prosedyren gir samme svar uavhengig av hvordan  $\vec{A}$ -retning velges (kan ikke endre formlen basert på vår konvensjon for  $\vec{A}$ ).

For spole med  $N$  identiske viklinger er  $\mathcal{E} = -N \cdot \frac{d\Phi_B}{dt}$ .

### EKSEMPEL

En sirkulær spole med  $N=500$  viklinger har  $r=4\text{cm}$  og plasseres mellom polene til en magnet. Feltet er uniformt og synker med  $0.02\text{ T/s}$  (se figur). Hva er størrelse og retning til  $\mathcal{E}$ ?



[S

$$\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

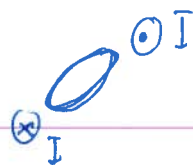
Finner først  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos(30^\circ) > 0$ .

(NB!  $30^\circ$  mellom  $\vec{B}$  og  $\vec{A}$ )

Derfor  $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dB}{dt} \cdot A \cdot \cos 30^\circ = -0.02\text{ T/s} \cdot \pi (0.04\text{ m})^2 \cdot \cos 30^\circ < 0$ . Indusert  $\mathcal{E}$ MS er nå

$$\mathcal{E} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = 0.435\text{ V}$$

Siden  $\mathcal{E} > 0$  er retningen slik til strømmen:

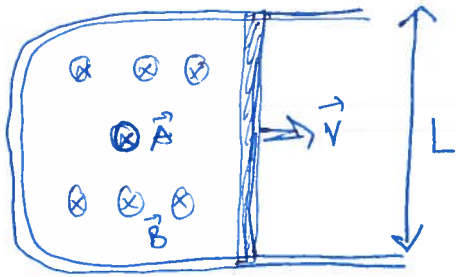


Dette inducerer et felt som motvirker endringen som forårsaket strømmen = konsistent.

EKSEMPEL En U-formet leder i et uniformt B-felt har

et justerbart areal via en glidende arm med lengde L.

Finn retning og størrelse til  $\mathcal{E}$  når armen flyttes mot høyre med konstant hastighet  $\vec{v}$ .

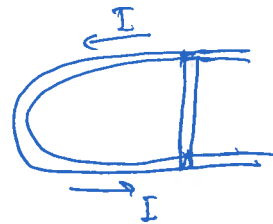


Fluks er positiv  $\Phi = B \cdot A > 0$   
og fluksendring  $\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot \frac{dA}{dt} > 0$   
siden arealet øker.

I løpet av  $dt$  øker arealet med  $L \cdot v \cdot dt \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot \frac{Lv dt}{dt} = BLv$

slik at  $\mathcal{E} = -BLv$ .

Siden  $\mathcal{E} < 0$ , går strømmen mot klokken:



Dette eksemplet viser hvordan mekanisk energi (flytte på armen L) konverteres til el. energi via et magnetisk felt  $\Rightarrow$  generator.

### Lenz lov

Vi kan ~~bestemme~~ retningen til induert  $\mathcal{E}$  og strøm via analysen

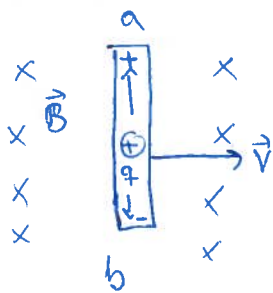
for energi bevarelse vi gjorde isted. Lenz lov gir en rask og intuitiv

måte å bestemme retningen på som er helt konsistent med prosedyren 1) - 4) som vi introduserte:

Retningen til en magnetisk induisert strøm er slik at strømmen prøver å motvirke opphavet til effekten.

Merh at Lenz lov gir kun retningen: størrelsen til den motvirkende fluksen er avhengig av resistansen til materialet. Jo lavere  $R$ , jo vanskeligere er det å endre fluksen siden den induerte strømmen gir et sterkere bidrag til den motvirkende fluksen.

La oss prøve å forstå det mikroskopiske opphavet til induert  $\mathcal{E}$  bedre. Vi vet fra Hall effekten at hvis vi beveger en ledende stav i et magnetfelt så samler ladning seg opp i kantene: induert spenning.



Ladningsakkumuleringen helt til at  $F_B = F_E$ :

$qE = qvB$ . Spenningsforskjell  $V_{ab} = V_a - V_b = E \cdot L$   
og dermed  $V_{ab} = vBL$ .

Hvis vi nå holder staven til den U-formede lederen vi betraktet i eksemplet, vil ladningsakkumuleringen i pkt. a og b redistribueres langs lederen  $\rightarrow$  elektisk felt oppstår i lederen og EMF er skapt.

Vi ser at effekten av mag. industert EMS er analog med at vi hadde koblet et batteri på pnt. a og b med spenningsforskjell  $\mathcal{E}$ , selv om opphæret er forskjellig.

Formelen  $\mathcal{E} = vBL$  for det spesifikke eksemplet med en U-formet kan generaliseres til en leder med vilkårlig geometri som beregnet seg i et felt  $\vec{B}$  som ikke nødvendigvis er uniformt (men tidsuavhengig):

● et element  $d\vec{l}$  bidrar  $d\mathcal{E}$  til EMS hvor  $d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$   
(husk at  $\vec{v} \times \vec{B}$  uttrykker den industerte spenningen fra ladningsakk.)

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}} \quad (\text{for en lukket ledende sløyfe})$$

Denne er ekvivalent med  $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$  for ledere i beregelse,

~~men kan~~ men kan ikke brukes for stasjonære ledere

● i tidsvarierende mag. felt.

W: Lenz. pnt @

### Induserte elektriske felt

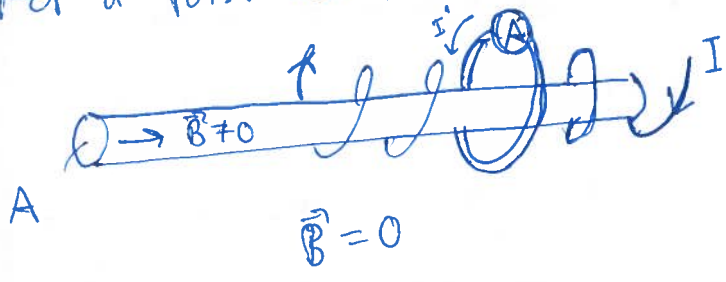
● om det finnes det noen EMS når vi har en stasjonær

leder i et tidsuavhengig  $\vec{B}$ -felt? Ingen magnetisk kraft siden

ledningene i utgangspnt. ikke er i beregelse.

For å forstå dette, la oss betrakte følgende situasjon:

~~Utante indusert er  $\frac{d\Phi}{dt}$  = ...~~



Lang solenoide med tverrsnitt A og N viklinger med strøm I.

Merke at  $\vec{B}$ -felt er begrenset til sylindrisk region. Dersom  $\frac{dI}{dt} \neq 0$ , endres fluksen gjennom den ledende ringen siden  $\vec{B}$  endres  $\rightarrow$  strøm  $I'$  induseres og måles med  $\otimes$ . Hva driver strømmen?

Er det magnetisk kraft på ladningene i ledere? Nei,  $\vec{B} = 0$  utenfor solenoiden. (Såfall må det eksistere en EMS  $\epsilon$  som kalkuleres som i et batteri) driver strømmen. Er ledere ohmsk, har vi at  $I' = \frac{\epsilon}{R} = \frac{-d\Phi_B/dt}{R}$  i følge Faradays lov.

Hva er  $\nabla$  opphavet til  $\epsilon$ ? Det må være et elektrisk felt induisert av den varierende mag. fluksen. Dette  $\vec{E}$ -feltet er litt annerledes enn  $\vec{E}$  generert av statisk lad.-distr - det er ikke konservativt!

For å se dette, la oss kjapt repetere:

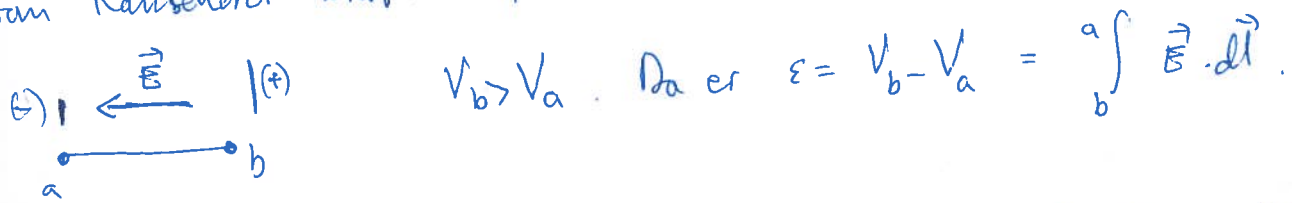
$\vec{E}$ -felt fra stat. lad. distr. er konservativt  $\rightarrow \vec{E} = -\nabla V$  og utført arbeid kan uttrykkes via potensiell energi (kalkuleres som for gravitasjon)

Pot. forskjell er da  $V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Vi ser at et slikt kons.

$\vec{E}$ -felt utfører null arbeid for en lukket vei (uavh. vei) =

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{el. felt fra stat. lad. distr.})$$

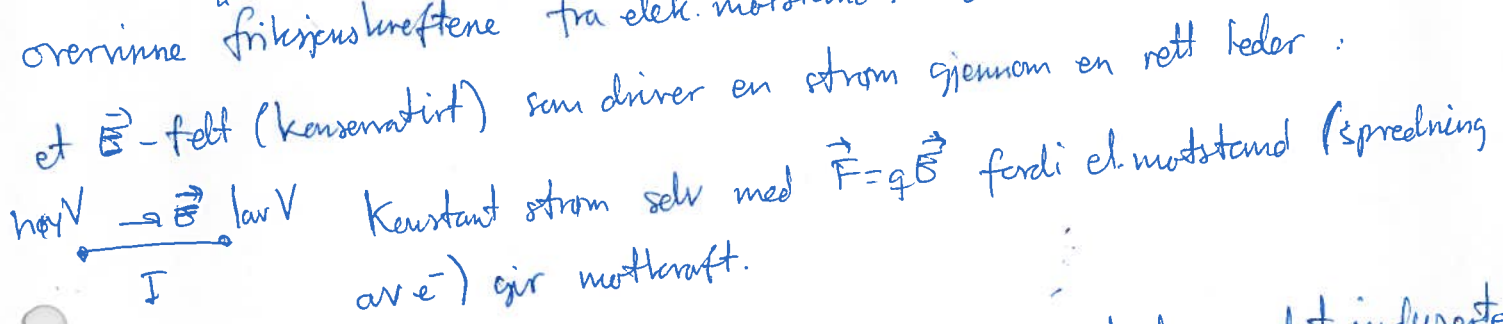
I en EMS-kilde (f.eks. batteri) leveres en EMS  $\varepsilon$  som gjør at strømmen kan gå fra lavt ( $V_a$ ) til høyt ( $V_b$ ) potensiale: skaper altså en kraft som kansellerer kraften fra det elektrostatiske feltet  $\vec{E}$ .



EMS utfører altså et arbeid på ladningene når de flyttes fra - til + pol i et batteri, men det er null netto arbeid utført på ladningene pga. det motvirkende  $\vec{E}$ -feltet  $\rightarrow$  konsistent med at kin. energi er konstant

• siden generelt  $W = T_2 - T_1$ .

La oss da gå tilbake til induert EMS. Dessuten det induerte  $\vec{E}$ -feltet skal drive en strøm gjennom ledere må det utføre et arbeid for å overvinne "friksjonskreftene" fra elek. motstand. Dette er samme sak som for



Men! Tj forstijell fra el. stat. distr. felt som er konservativt, er det induerte  $\vec{E}$ -feltet ikke-konservativt fordi at  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$ . Totalt arbeid

utført (pr. ladning) av EMS når en ladning er transportert en runde



er nettopp  $\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Det er en naturlig generalisering av (stikk at  $I' = \varepsilon/R$ )

$\varepsilon = \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$  som vi så ovenfor, men det er tydelig at vi ikke kan definere noe

potensiale siden a og b nå er samme pkt. Skulle det eksistere et bidrag til  $\vec{E}$  fra et kons.  $\vec{E}$ -felt, kan det trygt tas med siden det ikke gir bidrag pga.  $\oint \vec{E}_{\text{cons}} \cdot d\vec{l} = 0$ !  $\vec{E}$  kan derfor tas som totalt elek. felt.

Kan da for dette tilfellet (med en stasjonær integrasjonsvei) skrive Faradays lov som:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\vec{E} \text{ er totalt felt}).$$

(Merk at  $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$  er alltid generelt gyldig.) Dette er en kvalitativt annerledes situasjon enn det elektrostatiske tilfellet vi har sett på tidligere hvor  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  var tilfellet.

Det  $\vec{E}$ -feltet som blir induisert av  $\vec{B}$ -feltet her er altså ikke konservativt og kan ikke produseres av en statisk ladningsdistr.

Dette gir begge veier: skal snart se at tidsvarierende  $\vec{E}$ -felt også inducerer  $\vec{B}$ -felt!

Magnetisk induerte  $\vec{E}$ -felt brukes i praktiske applikasjoner: alt fra bilmotorer til pickup'en på en el-gitar (vibrasjonen av magnetiske elementer konverteres til strøm).

NB! Kraften  $\vec{F} = q\vec{E}$  på en ladning  $q$  gjelder alltid uansett hva som produserer  $\vec{E}$ -feltet.

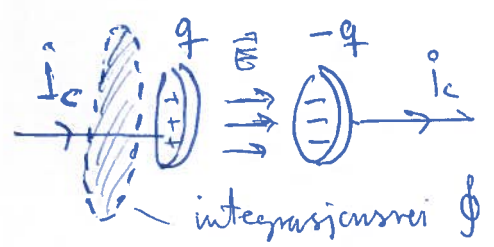


# Forskyvningsstrøm og Maxwell's lover

Skal nå innføre de viktigste likningene i elektromagnetisme: Maxwell's ligninger. Disse utgjør fundamentet for beskrivelsen av alle el. mag. bølger slik som radiobølger, gamma-stråling og synlig lys.

## Generalisering av Amperes lov

Vi påstod tidligere at Amperes lov var  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$  hvor  $I_{enc}$  var strømmen som gikk igjennom overflaten som er begrenset av integralsveien  $\oint$ . For å se at noe mangler i Amperes lov, betrakt en kondensator som lades:

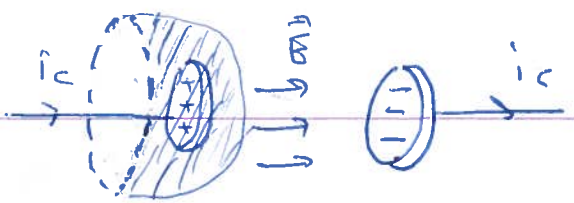


$i_c$ : instantan ledningsstrøm ved tid  $t$ .

Spesifiserer ledningsstrøm for å skille fra det vi skal innføre: forskyv. strøm.

Hvis får vi  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c$ .

Men betrakt nå en annen flate som er begrenset av samme sirkulære integrasjonsvei:



Hvis får vi  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

siden ingen strøm går mellom

kond.-platene  $\Rightarrow$  samme integral

(Tenk deg at vi tar den første flaten: integralet kan ikke være 0 hvis vi velger en annen flate)

Kan ikke være  $\mu_0 i_c$  og 0 samtidig avhengig av hvilken flate vi velger (begge flatene er jo avgrenset av samme sirkel)

Avstanden oppnår vi konstantens? Merk først at når platene lades, øker  $\vec{E}$  stadig siden  $q$  øker. Kan beregne hvor raskt  $\vec{E}$ -feltet øker på følgende vis.

Instantan ladning på kond er  $q = C \cdot v$  ( $v \equiv$  inst. pot. forskjell).

Her  $v = E \cdot d$  (uniformt felt). For generalitet, la det være et materiale mellom platene med permittivitet  $\epsilon$ . For parallell-plate kond.

har vi tidligere sett at  $C = \frac{\epsilon A}{d}$ . Kombinerer dette til:

$$q = C \cdot v = \frac{\epsilon A}{d} \cdot E \cdot d = \epsilon BA = \epsilon \Phi_E$$

hvor  $\Phi_E$  er elektrisk fluks.

Siden  $i_c = \frac{dq}{dt}$  får vi at  $i_c = \epsilon \cdot \frac{d\Phi_E}{dt}$  når platene lades.

• Hvis vi for øyeblikket prøver å redde Ampères lov (senere ser vi om det kan rettferdiggjøres), ser vi at dersom vi definerer forflyttings-

strømmen  $i_D = \epsilon \cdot \frac{d\Phi_B}{dt}$  så vil Ampères lov på formen

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_c + i_D)$  end være tilfredsstillende uansett hvilken flate vi velger.

For  er  $i_D = 0$ , mens for  er  $i_C = 0$

mens  $i_D$  er lik  $i_C$  for den flate over flaten  $\Rightarrow$  integralet

of  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  har samme verdi i begge tilfeller. ~~likningen holder også~~

~~for magnetiske materialer som er i kontakt med platen~~

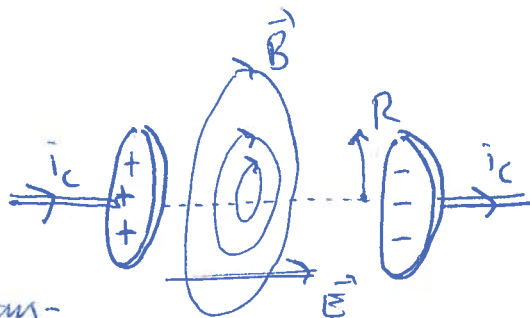
● Konseptet forskyvningsstrøm  $i_D$  ble introdusert i 1865 av

Maxwell og redder Amperes lov. Men er dette et reelt konsept?

Det er jo ikke en faktisk strøm\*, men heller en tidsvarhengig el. flukes. som vi kaller en forskyvningsstrøm.

For å avgjøre om dette konseptet kan anvendes er testen (som alltid) å sjekke om det gir en oppførsel som stemmer med det som måles eksperimentelt.

Test: betrakt følgende oppsett



Betrakt de sirkulære, tenkte integrasjons-

veiene mellom platene. Hvis forskyvningsstrømmen virkelig

har en målbar effekt og skal inngå i Amperes lov, så ser vi at det burde eksistere et  $\vec{B}$ -felt mellom platene.

$\Rightarrow$  kan regne ut dette teoretisk og sammenlikne med målt felt.

\*  $\epsilon \frac{dQ_D}{dt}$  inkluderer polariseringsstrøm som er en reell strøm, strengt tatt

Vi betrakter sirkulære kend.-plater  $R$  og en int. rei med radius  $r$ .

Tetthet til forsv. strøm:  $j_0 = \frac{i_0}{\pi R^2}$ , slik at

$$i_{0, \text{end}} = j_0 \cdot \pi r^2 = i_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2. \quad \text{Vet at } i_0 = i_c \text{ for kend. når}$$

den lader samt at:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B. \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 i_c \left(\frac{r}{R}\right)^2 \Rightarrow \underline{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_c.}$$

Ekspenimenter bekrefter at dette er  $B$ -feltstyrken i en avstand  $r$  fra aksen  $\Rightarrow$  forsvmingsstrøm gir virkelig opphav til et magnetisk felt og skal inngå i Amperes lov.

## Maxwells likninger

Vi er nå i stand til å på svært elegant vis oppsummere alle

relasjoner mellom  $\vec{E}$ -felt,  $\vec{B}$ -felt og deres kilder i Maxwells likn.

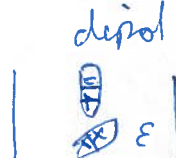
~~Vi gir her formen til likn. under antakelse om at  $\epsilon_0$  og  $\mu_0$  er de relevante konstantene (ser i kap. 32 hvordan dette endres dersom vi har et dielektrisk eller magnetisk materiale), dvs. at alle ladninger og strømmer befinner seg i et medium ekvivalent med vakuum.~~

(gyldige både i materialer og vakuum)

Bohen skinner: bytt ut  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$  og  $\mu_0 \rightarrow \mu$  hvis dielek. og mag. materiale.

Kun viktig dersom ic er fri strøm: ikke bidrag

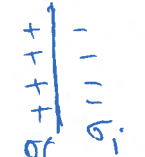
fra bundne strømmer som f.eks. bidrar til magnetisering



eller polariseringstrøm. La oss se på riktningen: 

begynner disse å rotere, så flyttes ladning  $\rightarrow$  strøm per dot.!

Kan vise at  $I_p = \epsilon_0 \chi_E \frac{d\Phi_E}{dt}$  (for  $\vec{p} \propto \vec{E}$ , alternativt

Sam vi antar for utledning av  $C = \frac{\epsilon A}{d}$ , basert på

$\sigma_i = \sigma_f (1 - \frac{1}{\epsilon_r})$   Hvis vi tar med  
kond-plate

denne strømmen for den  flaten, så er forskjellen mellom den og  lik  $\epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  og Ampere's lov kan

skilles generelt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I_{tot} + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

uten at vi nå bytter  $\mu_0$  og  $\epsilon_0$  ark. av materiale. Alternativet er altså

---

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \left( I_{free} + \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \text{ hvor } \mu \text{ og } \epsilon \text{ er de som fyller materialet.}$$

$$1) \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{encl}}}{\epsilon_0}$$

$$2) \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$3) \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{encl}}$$

$$4) \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$Q_{\text{encl}}$  og  $i$  er total lad. og strøm; da er disse generelt gyldige

1) og 2) involverer et integral over en lukket overflate.

1) & Gauss lov for  $\vec{E}$ , mens 2): Gauss lov for  $\vec{B}$ .

NB! 2) betyr at det ikke eksisterer magnetiske monopoler som alene gir opphav til magnetiske felt.

3) = Ampere's lov uttrykker at ledningsstrøm og tidsavhengig  $\vec{E}$ -felt begge inducerer et  $\vec{B}$ -felt.

4) = Faradays lov uttrykker at tidsavhengig  $\vec{B}$ -felt inducerer  $\vec{E}$ -felt.

$\vec{E}$ ; disse likningene er totalt el. felt = både elektrostatiske og det ikke-konservative bidraget som blir induisert magnetisk.

F.eks.:  $\vec{E}_{\text{kons}}$  bidrar ikke i 4) mens  $\vec{E}_{\text{non-cons}}$  bidrar ikke i 1) siden feltlinjer for induserte  $\vec{E}$ -felt danner lukkede sløyfer (ingen kilde/ladning).

Differensiell form for likningene



Nerner også her at Maxwell's ligninger kan skrives på differensiell form istedet for integral form.

~~Forsiden er at på~~

~~diff. form er de universelt gyldige maxw. ligninger eller vakuum~~

$$1) \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauss lov})$$

$$2) \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{ikke noe navn})$$

$$3) \nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad (\text{Faradays lov})$$

$$4) \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad (\text{Amperes lov})$$

$\rho$  og  $\vec{J}$   
er total lad.  
og strøm, inkl.  
pot. strøm.

### Symmetri i ligningene

I vakuum, dvs. uten kildeledd  $\rho=0$  og  $\vec{J}=0$ , har ligningene en høy symmetri og  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  kan essensielt byttes med hverandre.

Det som hovedsaklig brytes symmetrien generelt er at det ikke finnes noen magnetiske monopoler; hadde vært vakkerst, men aldri observert.

Maxwell inså at ligningene predikerte at det kan eksistere elektromagnetiske objekter bestående av tidsavhengige  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  felt

Som propagerer selv gjennom vakuum siden de inducerer hverandre kontinuerlig!

# Alternativ (like generell) form på Maxwell's likninger

Se på  $\vec{E}$ -felt først. Total ladning:  $\rho = \rho_b + \rho_f$ .

Av og til er det mer hensiktsmessig å uttrykke Max. likn. via frie ladn. og frie strømmer - disse kan kontrolleres eksperiment i motsetning til de bundne ekvivalente.

Gauss lov gir da:  $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \rho_b + \rho_f$ .

- Polariseringen skapt av de bundne ladningene kaller vi  $\vec{P}$ :  
el. dipol. mom. per volumenhet. Vet at dipol peker fra  $-q$  til  $+q$ : motsatt av  $\vec{E}$ ,  
(kan vise generelt at dette er gyldig):  $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ .

Dermed har vi:  $\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$  Definerer da

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad (\text{elektrisk forskyvnings felt } \vec{D}).$$

- Nå kan Gauss lov uttrykkes kun med fri ladning:  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ .

Vi utledet tidligere at i et dielek. mat. ga Gauss lov:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_f}{\epsilon} \quad \text{hvor } \epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0. \quad \text{For å få konsistens har vi altså:}$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}}$$

Det betyr at forskyvnings feltet må være sterkere enn  $\vec{E}$  dersom  $\vec{P}$  eksisterer siden dette reduserer netto felt (hvis  $\epsilon > \epsilon_0$ ).



På samme vis kan vi decomp.  $\vec{J}$ ; Ampere's lov til  $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b$ , slik at (la  $\text{div} \vec{B} = 0$  for enkelhets skyld):

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) = \vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b$$

Slik som vi gjorde for bundet

lading  $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ , skriver vi nå  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$ . Her ikke noe minus tegn her siden  $\vec{M}$  er magnetisering (mag. dipol mom. per. volum) og for en gitt strøm  $\vec{J}_b$  peker  $\vec{M}$  i samme retning som et  $\vec{B}$ -felt skapt av  $\vec{J}_b$  (fra nord- til sørpole) i motsetning til  $\vec{P}$  som peker motsatt av  $\vec{E}$ -felt.

Dermed får vi:  $\nabla \times (\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}) = \vec{J}_f$  og definerer da:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

(har ikke noe spesielt navn)

Da får vi Ampere's lov uttrykt kun med frie strømmer:  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$ .

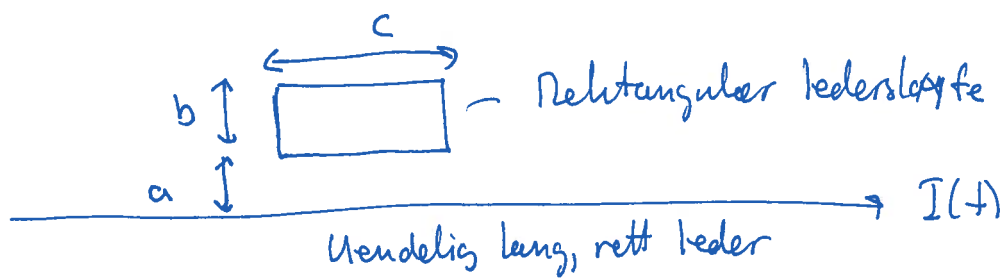
Slik som i det el. tilfellet, kan vi med  $\mu = \mu_r \mu_0$  skrive:  $\vec{B} = \mu \vec{H}$

( $\vec{M} = \chi_v \vec{H}$ ). (Dermed kan vi skrive like generelt:

- 1)  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$
- 2)  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
- 3)  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- 4)  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Uttrykt kun med frie ladninger og ladningsstrømmer. Bundet lading og strøm er definerte ut fra  $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$  og  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$  - det er hva de betyr. Valgtai kunne eksistere; materialer med  $\vec{P}$  eller  $\vec{M}$

\* Siden  $\text{div} \vec{B} = 0$  har vi ingen polariseringsstrøm som inngår i  $\vec{J}$ .



Bestem induert EMS i sløyfen  $\mathcal{E}(t)$  når:

$$I(t) = \begin{cases} \alpha + I_0 & 0 < t < 1/\alpha \\ I_0 & t > 1/\alpha \end{cases}$$

Samt retningen til strømmen som vil gå i sløyfen.

LØSNING Amperes lov  $\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  gir at

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{Mag. fluks. gjennom sløyfen er da:}$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 I \cdot c}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

$$\text{Indusert EMS er da: } \mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \cdot \frac{dI}{dt}$$

Fleks skapt av  $I(t)$  er ut av planet:  $\odot$ . Strøm som oppstår

fra  $\mathcal{E}$  må da ha retning for å motvirke dette: med klokken



Maxwells likninger sammen med Lorentz-kraften:

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  utgjør sammen alle fundamentale relasjoner i elektromagnetisme.

## KAPITTEL 30: INDUKTANS

- Læringsmål:
- Forstå relasjonen mellom tidsavhengige strømmer og induerte EM'er.
  - Kunne beregne energi lagret i et  $\vec{B}$ -felt.
  - Kunne analysere kretser som inkluderer både resistorer og induktorer.

Noen gang lurt på hvordan trafikklys kan vite når de skal endres fordi en bil har enkermet krysset? Svært får du vite fysikken bak dette.