Norwegian University of Science and Technology
Department of Physics

Contact: Jacob Linder
Phone: 735 918 68

Løsningsforslag 2019 oppgave 21-26

Problem 21: (a) Overflaten til kulen er $A = 4\pi r^2$. Intensiteten $I = P/A$ til synlig lys er dermed $0.05 \times 75\text{W}/(4\pi r^2) = 330$ W/m^2.

(b) Den elektriske felt-amplituden er relatert til intensiteten til den elektromagnetiske bølgen via:

$$E_{\text{max}} = \sqrt{2I/\varepsilon_0 c} = 500\text{V/m}. \tag{1}$$

Deretter kan vi beregne maks størrelse til det magnetiske feltet $B_{\text{max}} = E_{\text{max}}/c = 1.7\mu$T. Vi har brukt lyshastigheten i vakuum i denne formelen.

NB! Det kan ha vært forvirring vedrørende hvilken intensitet som skal brukes i (b): intensiteten til synlig lys eller intensiteten til den totale EM bølgen. Dermed har full poengscore blitt gitt til studenten uansett hvilket av disse alternativene som har blitt brukt når E og B har blitt beregnet.

Problem 22: (a) Vi bruker Kirchhoffs lov for spenning og får:

$$\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = 0. \tag{2}$$

Dette er en differensiallikning for strømmen som kan løses ved å skrive om til:

$$\frac{L\,di}{\varepsilon - iR} = dt \tag{3}$$

Ved å integrere begge sider, finner vi løsningen:

$$\ln[(\varepsilon - iR)/\varepsilon] = -Rt/L \tag{4}$$

som kan skrives om til

$$i = \frac{\varepsilon}{R}[1 - \text{e}^{-(R/L)t}]. \tag{5}$$

I denne utledningen brukte vi at ved $t = 0$ er $i = 0$. Det er forventet at studenten kan utlede at dette er den påkrevde initialbetingelsen, siden en endelig strøm ved $t = 0$ ville gitt en uendelig verdi for den deriverte di/dt. Siden $i(t = 0) = 0$, får vi fra likning (2):

$$di/dt|_{t=0} = \varepsilon/L = 2.4 \text{ A/s}. \tag{6}$$

(b) Generelt har vi fra likning (2) at

$$di/dt = (\varepsilon - iR)/L. \tag{7}$$

Når vi setter inn verdier og at $i = 0.5$ A, får vi $di/dt = 0.8$ A/s.

(c) Ved å bruke likning (4), får vi 0.41 A.

(d) Under stasjonære forhold ($t \to \infty$) må vi ha $di/dt \to 0$, slik at $\varepsilon - iR = 0$. Derfor får vi ved å sette inn tall $i(t \to \infty) = 0.75$ A.

Problem 23: Nøkkelen til å løse oppgaven er å først innse at det elektriske feltet i en avstand R fra midten av solenoiden kan beregnes ved å bruke Faradays lov $\varepsilon = -d\Phi/dt$ siden

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E \times 2\pi R. \tag{8}$$

Den resulterende fluksen beregnes ved å bruke at det magnetiske feltet kun eksisterer inni solenoiden og har en konstant verdi der, slik at $\Phi = B\pi r^2$ where $r = 1.1$ cm.

Det gjenstår å beregne hva det magnetiske feltet er inni solenoiden. Det er forventet at studenten kan bruke Amperes lov til å utlede at

$$B = \mu_0 n i \tag{9}$$

hvor $n = 400$ er antall viklinger per meter og i er strømmen som går igjennom hver vikling. En detaljert utledning av dette resultatet blir gitt i forelesningsnotatene på slutten av kapittel 28. Dermed får vi:

$$|\varepsilon| = |d\Phi/dt| = |d/dt(\mu_0 n i \pi r^2)| = \mu_0 n \pi r^2 |di/dt| = E 2\pi R. \tag{10}$$

Dette gir oss $|di/dt| = 9.21$ A/s.

Problem 24: Dreiemomentet er gitt ved $\tau = \mu \times \mathbf{B}$. Det maksimale dreiemomentet oppnås når planet som ringen ligger i er orientert parallelt med det magnetiske feltet, siden vi da får $\mu \perp \mathbf{B}$. Verdien til dreiemomentet i denne situasjonen er da:

$$\mu B = [I\pi(d/2)^2]B \tag{11}$$

hvor $B = 0.375$ T. Vi trenger å beregne I og dette får vi til ved å bruke Biot-Savarts lov. Den lar oss utlede følgende relasjon mellom strømmen I og feltet b skapt i midten av ringen av selve strømmen (se f.eks. `https://cnx.org/contents/A6AqGAGN@7/Magnetic-Field-of-a-Current-Loop` for utledning):

$$b = \mu_0 I/2R. \tag{12}$$

Siden $b = 75.4\mu$T, får vi $I = 3$ A. Dette gir oss til slutt en verdi for det maksimale dreiemomentet: $\tau = \mu B = 2.2 \times 10^{-3}$ Nm.

Problem 25: Ladningen q på hver kondensator må være den samme siden de er serie-koblede. Den effektive kapasitansen til kretsen er da, som vist i forelesningene, gitt ved

$$1/C_{\text{eff}} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 \tag{13}$$

hvor C_i er kapasitansen til hver av de tre kondensatorene. På denne måten finner vi at $C_{\text{eff}} = 4.6$ pF. La fra nå av $C \equiv C_{\text{eff}}$. Energien som er lagret i kondensatorene kan nå beregnes fra den effektive kapasitansen som holder på en ladning q, i følge:The energy stored on the capacitors can now be computed from the single effective

$$U = q^2/2C. \tag{14}$$

Ved å bruke Kirchhoffs lov for spenning, finner vi:

$$q/C + iR = 0 \to q/C + (dq/dt)R = 0 \tag{15}$$

hvor q er den instantane ladningen på den effektive kondensatoren. Denne likningen løser ved å skrive den om til

$$dq/q = -dt/RC \tag{16}$$

og integrere på begge sider. Det gir oss:

$$q = Q_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)} \tag{17}$$

where $Q_0 = 3.5$ nC er ladningen som opprinnelig sitter på kondensatoren. Strømmen i kretsen blir dermed

$$|i| = |dq/dt| = (Q_0/RC)\mathrm{e}^{-t/(RC)}. \tag{18}$$

Når kapasitatoren har mistet 80% av sin opprinnelig lagrede energi, så er den gjenstående lagrede energien lik $0.2Q_0^2/2C$. På tiden t hvor dette inntreffer, vil dermed følgende likning være gyldig:

$$Q_0^2 \mathrm{e}^{-2t/(RC)}/2C = 0.2Q_0^2/2C, \tag{19}$$

som vi kan løse ut for t fra. Det gir oss:

$$t = 92.9 \text{ ps}. \tag{20}$$

Strømmen på det tidspunktet kan da beregnes i følge likning (17) og vi får:

$$I = 13.6 \text{ A}. \tag{21}$$

Problem 26: (a) Nøkkelen her er å bruke Gauss lov for en sfærisk overflate slik at vi kan benytte oss av radiell symmetri. For en Gaussisk flate formet som en sfære med radius r får vi:

$$Q_{\text{encl}} = \int_a^r \rho(r')dV = 4\pi\alpha \int_a^r r'dr' = 2\pi\alpha(r^2 - a^2). \tag{22}$$

I følge Gauss lov, skal dette være lik $E4\pi r^2$. Dermed kan vi løse ut for det elektriske feltet:

$$E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}(1 - \alpha^2/r^2). \tag{23}$$

(b) Det elektriske feltet skapt av punktladningen er lik $E_q = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Vi ser at punktladningen kompenserer for $1/r^2$ bidraget fra E-feltet skapt av det sfæriske skallet dersom følgende er oppfylt:

$$q = 2\pi\alpha a^2. \tag{24}$$

Kun det konstante leddet i likning (22) gjenstår da, slik at:

$$E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0}. \tag{25}$$