Raskt oppfriskningskurs i matte for elmag

Dette er ting dere har lært/kommer til å lære om dette semesteret, men tar en kjapp gjennomgang slik at dere har et visst forhold til operasjonene vi kommer til å trenge for å formulere diverse lover i elmag.

① Differensiell operator ∇. Generalisering av derivert $\frac{df}{dx}$ til flere dimensjoner. For en skalar $f = f(x,y,z)$ har vi at siden:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

så er $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Kalles gradienten til f og peker i retningen hvor f endrer seg raskest.

Dersom vi istedet for et skalart felt $f(x,y,z)$ [skalar verdi på hvert pkt. i rommet] har et vektor-felt $\vec{F}(x,y,z)$ [gir en vektor på hvert pkt. i rommet] så er divergensen til $\vec{F}$ definert ved:

$$\nabla \cdot \vec{F} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

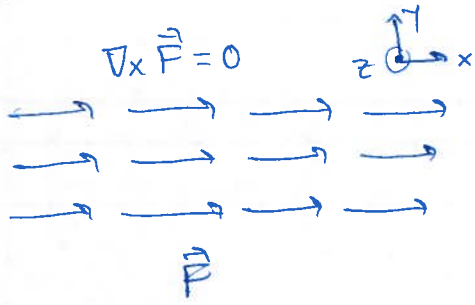
Dette er altså en skalar. Kan tenkes på som et slags mål på hvordan $\vec{F}$ endrer seg i retningen den peker. [Gi eksempler skalarfelt (temp) og vektorfelt (hastighet til væske)]

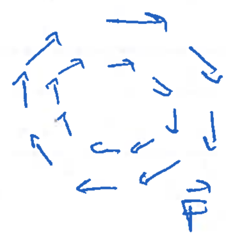
Vi kommer også til å få bruk for <u>curl</u> til et vektorfelt:

$$\text{curl}\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\partial_y F_z - \partial_z F_y\right) - \hat{y}\left(\partial_x F_z - \partial_z F_x\right) + \hat{z}\left(\partial_x F_y - \partial_y F_x\right).$$

Curl til $\vec{F}$ er knyttet til rotasjonen til $\vec{F}$ om et punkt:

$\nabla \times \vec{F} = 0$





$\nabla \times \vec{F} \neq 0$

Kommer til å utføre integraler over disse størrelsene på ulike måter:

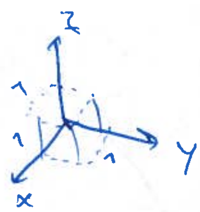
② <u>Volum-integral</u>. Integral over et 3D område → 3 integraler.

$$\int f(x,y,z)\, dV = \iiint f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

(kan også skrive $\iiint f(x,y,z)\, dV$)

Her er altså $dV = dx\,dy\,dz$ i Kartesiske koordinater.

Eksempel: Integrer $f = x z^2$ over et kubisk volum.



$$\int f\, dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x z^2)\, dx\,dy\,dz$$

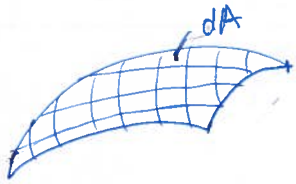
$$= \int_0^1\int_0^1 \left[\tfrac{1}{3} x z^3\right]_0^1 dx\,dy = \int_0^1 dx\, \tfrac{1}{3} x \cdot \underbrace{\left[y\right]_0^1}_{=1} = \left[\tfrac{1}{6} x^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{6}.$$

③ <u>Overflateintegral.</u> Integral i to dimensjoner, f.eks. over et rektangel i xy-planet.

Kan integrere en skalar funksjon f:

$$\int f\,dA = \int_0^3\int_0^5 f\,dy\,dx$$ for rektangelet. (skrives også $\iint f\,dA$).

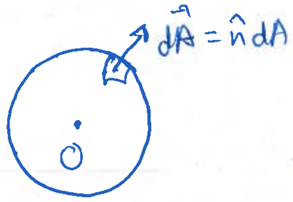
Kan ha mer kompliserte flater: dA må da beregnes for den flaten man har.



Vi kan også ha integraler over vektorfelt $\vec{F}$: $\int \vec{F}\cdot d\vec{A}$ hvor $d\vec{A} = \hat{n}\,dA$ og $\hat{n}$ er normalvektor til flaten.

Vi kommer f.eks. til å jobbe en del med sfæriske flater: en bruker da $\oint$ for å indikere at overflateintegralet tas over en lukket flate (f.eks. overflaten til en kule).

Eksempel: Anta vi har et vektorfelt $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ [kun avhengig av radius og peker radielt] som vi vil integrere over en lukket flate: overflaten til kule med radius R. La $\hat{n}$ peke ut av kulen.

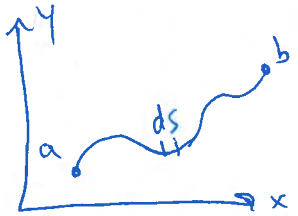


$$\underline{\oint \vec{F}\cdot d\vec{A}} = F(R)\cdot\oint dA = \underline{F(R)\cdot 4\pi R^2}$$

($dA = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$)

($\sin\theta$ fordi bredden når vi endrer φ blir mye mindre på toppen.)

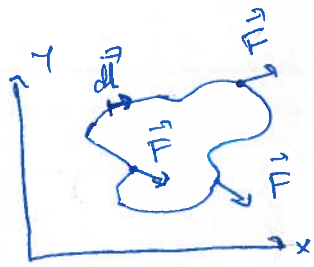
④ Linjeintegral. Et integral hvor en funksjon integreres langs en kurve.



$\int_a^b f(x,y)\,ds$ er et linjeintegral over veien i bildet fra a til b. Merk at $a=(x_a,y_a)$ og $b=(x_b,y_b)$.

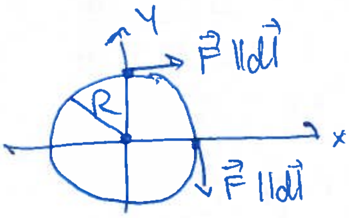
Kan også utføre linjeintegral over et vektorfelt $\vec{F}$:

$\int \vec{F}\cdot d\vec{l}$, eller hvis lukket vei $\oint \vec{F}\cdot d\vec{l}$.



$\int_0^3 f(x)\,dx$ er altså et spesial tilfelle av et linjeintegral

Vi kommer ofte til å se på situasjoner hvor vi integrerer over lukkede veier (sirkler) med vektorfelt som er tangensielle til veien:



Da får vi (dersom $\vec{F}=\vec{F}(r)$):

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = F(R)\cdot L$$ hvor L er omkretsen til sirkelen ($L=2\pi R$) og

$\vec{F} = -F(r)\,\hat{\varphi}$

Mer detaljert:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = \oint [-F(R)\hat{\varphi}]\cdot[-dl\,\hat{\varphi}] = F(R)\oint dl = F(R)\cdot L.$$