Maxwells likninger sammen med Lorentz-kraften:

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ utgjør sammen alle fundamentale relasjoner i elektromagnetisme.

KAPITTEL 30 INDUKTANS

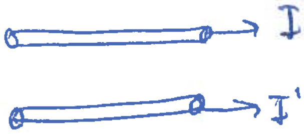
Læringsmål:

- Forstå relasjonen mellom tidsavhengige strømmer og induserte EMSer.
- Kunne beregne energi lagret i et $\vec{B}$-felt.
- Kunne analysere kretser som inkluderer både resistorer og induktorer.

Noen gang lurt på hvordan trafikklys kan vite når de skal endres fordi en bil har ankommet krysset? Snart får du vite fysikken bak dette.

Gjensidig induktans

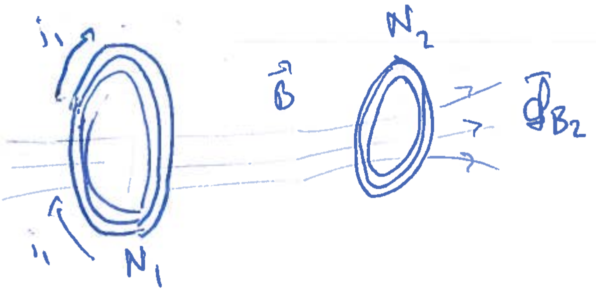
Så tidligere at oppsettet



med konstante strømmer ga opphav til en vxv. mellom lederne pga. mag. krefter.

Ytterligere vxv. dersom vi har en <u>tidsavhengig</u> strøm $i = i(t)$.

Betrakt to strømspoler med flere viklinger:



En strøm i_1 i spole 1 fører til en mag. fluks gjennom spole 2.

Dersom i_1 endrer seg med tiden, induseres en EMS i spole 2 pga. Faradays lov $\Rightarrow$ <u>i_1 induserer en strøm i_2</u>.

Mer kvantitativt: det mag. feltet $\vec{B}$ produsert av spole 1 er prop. med i_1 $\Rightarrow$ $\Phi_{B2} \propto i_1$. Vet at indusert EMS er

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt}.$$

La oss skrive proporsjonaliteten mellom Φ_{B2} og i_1 via en konstant M_{21} definert ved $N_2 \Phi_{B2} \equiv M_{21} i_1$.

$\boxed{M_{21} : \text{gjensidig induktans}}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_2 = -M_{21} \cdot \frac{di_1}{dt}$. Med andre ord: indusert EMS i spole 2

er direkte prop. med endringsraten av i_1.

M_{21} avhenger av flere aspekt: størrelsen, formen, antall viklinger, orientering og separasjon av spolene $\Rightarrow$ geometriavhengig.

Grunnen til "gjensidig" induktans: gjenta samme argument med ombyttede roller for spole 1 og 2 gir $N_1 \Phi_{B1} = M_{12} i_2$.

Eksperiment viser at $M_{21} = M_{12}$ selv om spolene er forskjellige —

kaller derfor dette gjensidig induktans M. Vi har altså:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt} \quad \text{og} \quad \mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \\ \text{hvor } M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{B1}}{i_2}\end{gathered}}$$

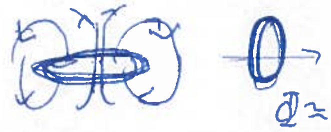
Minustegn pga. Lenz lov: motvirker endringen.

$[M] = 1\ H$ (henry). Har at

$$1\ H = 1 \frac{Wb}{A} = 1 \frac{V \cdot s}{A} = 1\ \Omega \cdot s.$$

Typiske verdier vi jobber med: $M \sim 10^{-4} - 10^{-6}\ H$.

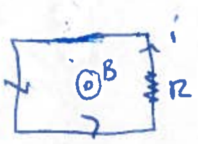
Fordel / ulempe

− : problem i el. kretser, da strømvariasjon i en del av kretsen kan indusere strøm (ukontakt) i en annen del. Redusere problemet ved å la planene strømsløyfene ligger i være ⊥ :  $\Phi \approx 0$.

+ : Kan utnytte induktanseffekten f.eks. i en transformator som brukes til å øke/senke spenninger. Strøm i_1 induserer EMS i spole 2 som dermed modifiserer netto spenningsforskjell i den delen av kretsen.

Selvinduktans og induktorer

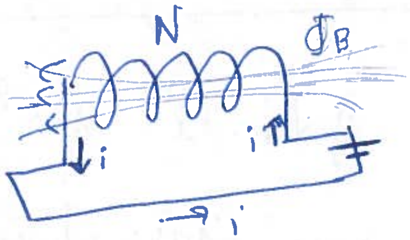
Trenger ikke en gang å betrakte to separate ledere/kretser for å diskutere induktans: det er tilstrekkelig med én, isolert krets.



Strømmen i skaper et $\vec{B}$-felt som gir en fluks gjennom samme krets og dermed vil $i = i(t)$ indusere en EMS: selvindusert EMS.

Igjen motvirker den induserte EMSen endringen i $i(t)$ ⇒ vanskeligere å endre strøm.

Effekten blir forsterket dersom vi har en spole med N viklinger



Slik vi har utledet i forrige seksjon, er selv-induktansen

$$\boxed{L = \frac{N \cdot \Phi_B}{i}}$$ (konstant siden $\Phi_B \propto i$).

hvor Φ_B er fluksen gjennom én vikling.

Det følger at $N \cdot \frac{d\Phi_B}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$ ⇒ indusert EMS er

$$\varepsilon = -L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Induktorer som kretskomponenter

Kretskomponent designet spesifikt for å ha en bestemt induktans:

—eeeeee— : induktor.

Kan inkluderes for å motvirke fluktuasjoner i strømmen og er sentrale deler av moderne elektronikk.

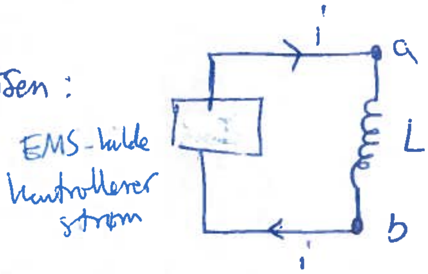
Har tidligere brukt Kirchhoffs lover for å analysere kretser:
strøm bevart i alle forgreningspkt. og totalt spenningsfall over en lukket sløyfe må være null. Sistnevnte følger av den konservative naturen til $\vec{E}$ i kretsene vi har sett på tidligere.

Men: nå har vi sett at mag. induserte $\vec{E}$-felt ikke er konservative.

Hvordan modifiseres Kirchhoff's loop-regel da?

Anta at vi har å gjøre med en induktor med neglisjerbar R.
Kreves veldig svakt $\vec{E}$-felt for å bevege ladninger gjennom induktoren $\rightarrow$ $\vec{E}_c + \vec{E}_n \approx 0$ ($\vec{E}_n$: ikke-konservativ del av felt).

Betrakt nå kretsen:



Faradays lov gir at:

$$\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt} = \mathcal{E}(t).$$ i følge det vi nettopp har utledet (har integrert i retning med klokken). $\mathcal{E}(t)$ er selvindusert EMS.

Men $\underbrace{\vec{E}_n \neq 0 \text{ kun i induktoren}}_{\text{Se rettferdiggjørelse her}}$, så vi kan la $\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \rightarrow \int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{l}$.

Se rettferdiggjørelse her

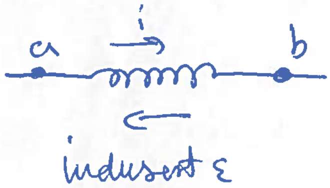
Siden vi har argumentert at $\vec{E}_n \approx -\vec{E}_c$ i induktoren, får vi:

$$\int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = L \cdot \frac{di}{dt}. \qquad \text{Men} \quad \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_{ab} = V_a - V_b$$

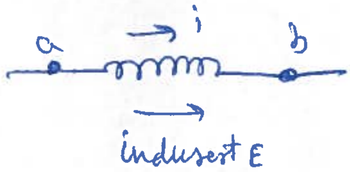
siden et kons. $\vec{E}$-felt kan skrives som gradient til et potensiale.

<u>Konklusjon</u>: $V_a - V_b = L \cdot \frac{di}{dt}$ $\Rightarrow$ det eksisterer et genuint spenningsfall over induktoren som vi kan inkludere på vanlig vis i Kirchhoffs regel (akkurat som $I \cdot R$ er spenningsfall over en R).

$V_{ab} = iR > 0$



$\frac{di}{dt} > 0$ (i øker) $\Rightarrow V_{ab} = L \cdot \frac{di}{dt} > 0$



$\frac{di}{dt} < 0$ (i minker) $\Rightarrow V_{ab} = L \cdot \frac{di}{dt} < 0$.

M: induktans.pdf

Energi i magnetisk felt

På grunn av at en induktor motvirker endringer i strøm, koster det energi å etablere en strøm i en induktor. Denne energien er <u>lagret</u> i induktoren når strømmen er etablert (og blitt konstant).

La oss se hvordan.

En økende strøm etablerer en $\mathcal{E}$ og en tilhørende pot. forskjell V_{ab}. Siden en ladet partikkel som beveger seg gjennom induktoren derfor taper pot.-energi ($V_{ab} > 0$ for 

$\frac{di}{dt} > 0$),

mer energi overføres til induktoren med en rate $P = V_{ab} \cdot i$. Vi kan beregne hvor mye energi U som leveres for å skape en konstant strøm I i en induktor L når $i(t=0) = 0$. Anta som før neglisjerbar motstand i L.

Strømmen øker fra $i(t=0)=0 \Rightarrow \frac{di}{dt} > 0$. Konstanten spenning mellom a og b er $V_{ab} = L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow$ levert effekt til induktoren er $P = V_{ab} \cdot i = L \cdot i \cdot \frac{di}{dt}$ (blir levert av kilden).

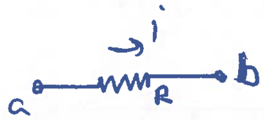
Siden $P = \frac{dU}{dt}$ hvor dU er energien levert over et intervall dt:

$$dU = L \cdot i \cdot di \Rightarrow \boxed{U = L \int_0^I i \, di = \frac{1}{2} L I^2}$$

Analogi: kond. har $U = \frac{1}{2} C V^2$

Dette er lagret energi i en induktor når strøm øker fra 0 til I.

Skrur vi av strømmen ($\frac{di}{dt} < 0$), leveres energien tilbake til kretsen via indusert EMS.



Energi går tapt i R

Energi lagres i induktoren.

Magnetisk energitetthet

Energi i kondensator C: lagret i $\vec{E}$-felt mellom plater.

Energi i induktor L: lagret i $\vec{B}$-felt i spolen.

På samme måte som vi tidligere utledet energitetthet for $\vec{E}$-felt, kan vi nå utlede det samme for $\vec{B}$-felt. Betrakt en solenoide formet som en torus

$\Rightarrow$ $\vec{B}$-felt $\neq 0$ kun inne i spolen.

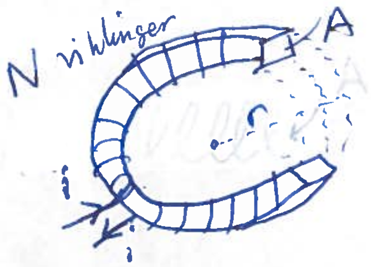


Fig. 30.8

Volum er $V = 2\pi r \cdot A$.

Selv-induktans er $L = \dfrac{N \cdot \Phi_B}{i}$ og felt i avstand r fra midten er (se eks. 28.10) $B = \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi r}$.

Anta A liten nok til å neglisjere variasjon av B innenfor A:

$$L = \frac{N \cdot B \cdot A}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}.$$

Når strømmen er I, vet vi at lagret energi er:

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} I^2.$$

$\Rightarrow$ energitetthet (siden $\vec{B}$-felt lokalisert i volumet V) $u = \dfrac{U}{V}$:

$$u = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 I^2}{(2\pi r)^2}.$$

Siden vi så at $B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$:

$$\boxed{U = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$ (magnetisk energitetthet i vakuum).

Analog med energitetthet i elektrisk felt: $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ utledet tidligere. Dersom mag. susc. i solenoiden ikke er μ_0, men μ (f.eks. magnetisk materiale), lar vi $\mu_0 \to \mu$:

$$\boxed{U = \frac{B^2}{2\mu}}$$ (mag. E-tetthet i et materiale)

Har kun utledet dette for en bestemt geometri, men et mer generelt bevis gir at dette er korrekt uttrykk for en vilkårlig mag. felt. konfigurasjon i et materiale. Total E lagret i $\vec{B}$-feltet er da:

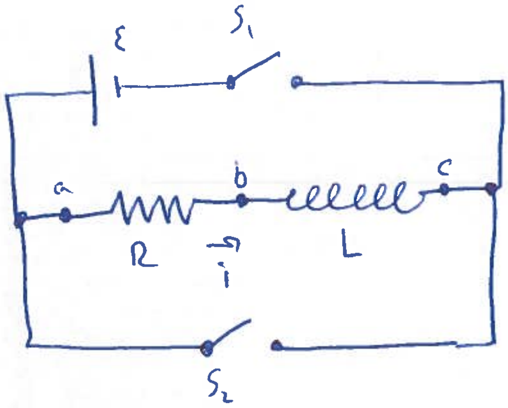
$$U = \iiint \frac{B^2}{2\mu} dV$$ (f.eks. for romlig varierende $\vec{B}$).

R-L krets

La oss nå se hvordan strømmen kvantitativt oppfører seg i en krets med induktor L. Vet allerede at:

- Induktor motvirker endringer i strømmen.
- Kan bruke Kirchhoffs lover med $V_{ab} = L \cdot \frac{di}{dt}$ for induktor.

Inkluderer også R for å gjøre kretsen mer realistisk (har alltid noe resistans med mindre superleder). Betrakter følgende.



S_1 og S_2 er brytere som er åpne til å begynne med.

Lukk S_1: R og L kobles til ε i serie.

Lukk S_2 og åpne S_1: R og L kobles fra kilden ε.

La S_1 lukkes ved $t = 0$. Ved en gitt tid $t > 0$ er da:

$V_{ab} = iR$ og $V_{bc} = L \cdot \frac{di}{dt}$. Kirchhoffs regel for spenning:

$$\varepsilon - iR - L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$ (gikk mot klokken).

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon - iR}{L}.$$

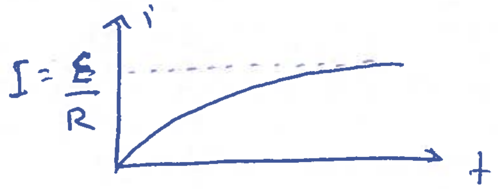
Siden $i(t=0) = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{L}$.

Strømmen øker så gradvis, men saktere og saktere pga. induktor, helt til $\frac{di}{dt} = 0$ (konstant strøm). Når strømmen har nådd endelig verdi I har vi:

$$\frac{di}{dt}\Big|_{t\to\infty} = 0 = \frac{\varepsilon}{L} - \frac{R \cdot I}{L} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Kan ikke ha $i(t=0) = I$ (som for RC-krets), siden det ville gitt $\frac{di}{dt} \to \infty$ og umulig å oppfylle Kirchhoffs lov om spenning.

Merk hvordan sluttstrøm er uavh. av L. Forventer altså en oppførsel av typen:



Kan utlede eksakt uttrykk for $i(t)$. Har at $\frac{di}{dt} = \frac{\varepsilon - iR}{L}$ som skrives om til

$$\frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = -\frac{R}{L}\,dt.$$

Har separert variablene i og t og kan dermed integrere på begge sider.

$$\int_0^i \frac{di'}{i' - \frac{\varepsilon}{R}} = -\int_0^t \frac{R}{L}\,dt' \Rightarrow \ln\left[\frac{i - \varepsilon/R}{-\varepsilon/R}\right] = -\frac{R}{L}\cdot t$$

Skrives om til $\boxed{i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-R\cdot t/L}\right)}$ (strøm i en R-L krets med EMS ε)

Dette stemmer godt overens med kurven i tegnet. Ser at $\frac{L}{R}$ er et mål på hvor raskt strømmen bygger seg opp mot endelig verdi.

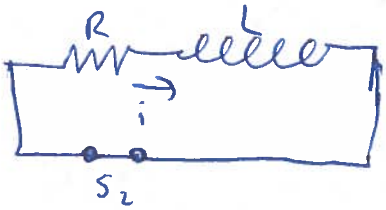
Definerer tidskonstanten $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$.

Stor τ: strøm bruker lang tid på å nå I

Liten τ: -"- kort tid.

Analog med tidskonstant $\tau = RC$ assosiert med lading av kond. C.

Anta nå at strømmen har nådd verdien I. Vi lukker nå bryter S_2 og åpner samtidig S_1 for å unngå kortslutning:

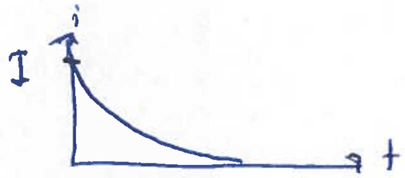


Strømmen burde nå avta gradvis, akkurat som den tiltok gradvis. La oss redefinere $t=0$ til øyeblikket S_2 lukkes.

$i(t=0) = I$. Nå har vi at $-iR - L\cdot\frac{di}{dt} = 0$ $(\varepsilon = 0)$.

$\Rightarrow$ Samme analyse som før gir: $\int_I^i \frac{di'}{i} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt'$

$$\ln\left(\frac{i}{I}\right) = -\frac{R}{L}\cdot t \Rightarrow \underline{i(t)} = I e^{-R\cdot t/L} = \underline{I e^{-t/\tau}}$$



Hvor kommer energien som driver strømmen fra? (spør klasse) $\Rightarrow$ induktoren har lagret energi under opplading som nå driver strømmen. Induktoren mister energi like raskt som energi dissiperes i R pga. energibevarelse. Ser dette ved å multiplisere K.lov med i:

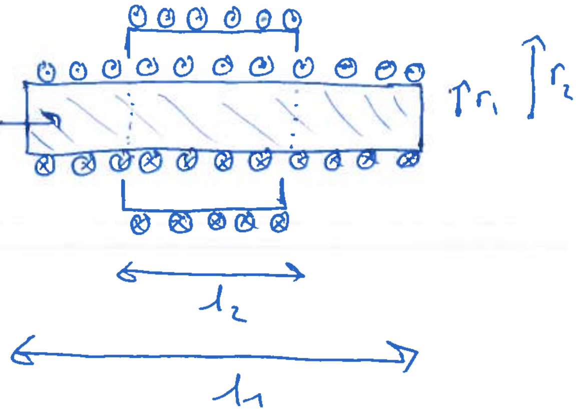
$$0 = \underbrace{i^2R}_{\text{Effekt ~~for~~ energitap i R}} + \underbrace{L\cdot i\frac{di}{dt}}_{\text{Effekt for energi levert av L.}}$$

EKSEMPEL (oppg. 7, eks. 2013) [slutteks. kap. 30]

Solenoide 1: $r_1 = 1\,cm$, lengde $l_1 = 10\,cm$, $N_1 = 500$ viklinger jevnt fordelt.

Solenoide 2: $r_2 = 1.5\,cm$, $l_2 = 4\,cm$, $N_2 = 300$ viklinger —"— .

Felles senter akse som vist i figuren:



Indre solenoide fylt m/jern:

$\mu_r = 2400$.

Anta $\vec{B} = 0$ utenfor solenoidene (forenkling).

Finn gjensidig induktans mellom solenoidene.

Løsning Mag. fluks inne i lang, tynn solenoide #1 er: (generert av #1)

$$\Phi_B = B \cdot A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pga. jern}}}{\mu_r \mu_0} \frac{N_1}{l_1} I_1 \pi r_1^2 .$$

Siden vi antok $B = 0$ utenfor solenoidene, erfarer #2 en fluks Φ_B fra #1. Faraday's lov gir da,

$$\varepsilon_{21} = -N_2 \cdot \dot{\Phi}_B = -N_2 \mu_r \mu_0 \frac{N_1}{l_1} \dot{I}_1 \cdot \pi r_1^2$$ (kun I_1 kan variere med tiden)

Gjensidig induktans definert ved $M = \dfrac{-\dot{I}_1}{\varepsilon_{21}}$ $(\varepsilon_{21} = -M \cdot \dot{I}_1)$ slik at

$$M = \frac{N_2 N_1}{l_1} \cdot \mu_r \mu_0 \cdot \pi r_1^2 = 1.42\,H.$$

Radien r_2 spiller ingen rolle – men i praksis gjør den det, siden Φ_B blir modifisert av B-feltet skapt av #1 utenfor #1 ⇒ M avtar med økende r_2 siden mer B-felt inkluderes i motsatt retning av B-felt inni #1.

KAPITTEL 31: VEKSELSTRØMMER

Læringsmål:

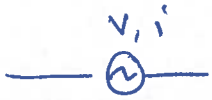
- Forstå hvordan visere gjør beskrivelsen av størrelser som varierer harmonisk (sin/cos) enkel
- Forstå rollen til reaktans og impedans i AC-kretser.
- Kunne analysere en RLC-krets med sinusoidal EMS og forstå rollen til frekvensen til kilden.

Nesten alle elektriske innretninger i et hjem bruker vekselstrøm
$\Rightarrow$ må lære om hvordan AC kretser fungerer.

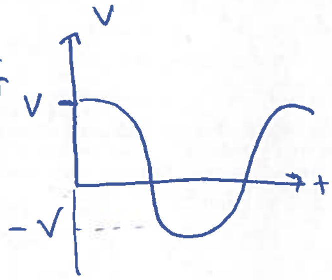
Visere og AC strømmer

Vi bruker begrepet AC kilde for en innretning som produserer en sinusoidalt varierende spenning v eller strøm i med tiden t.

Symbol:



For eksempel: $v = V\cos\omega t$



varierer med vinkel frekvens $\omega = 2\pi f$ (f = frekvens)

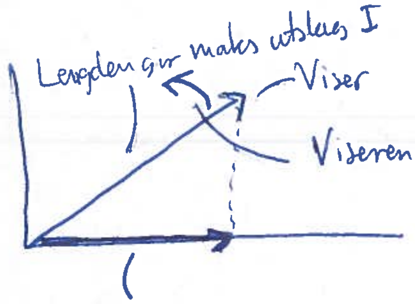
USA/Canada: Kommersielle distribusjonssyst. av elektrisitet bruker $f = 60$ Hz.

Stort sett overalt ellers: $f = 50$ Hz.

Hvorfor AC i hus?
For å kunne transformere høy spenning til lav spenning (innretning i hus) via Faradays lov.

Viserdiagram

Bruker en geometrisk størrelse kalt viser til å representere AC v og i:



$i = I\cos\omega t$

Projeksjonen av viseren på x-aksen gir instantan strøm ved tid t.

Dette er nært knyttet til kompleks notasjon hvor vi kan representere f.eks. en spenning som $V = Ve^{i\omega t}$ (komplekst tall) og at målbar spenning ved t er $\Re\{Ve^{i\omega t}\}$.

Et vanlig mål på AC størrelser er RMS-verdien (root-mean-square).

Anta at du begynner med $i = I\cos\omega t$.

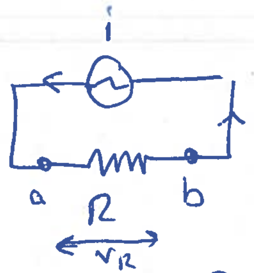
- Square. $i^2 = I^2\cos^2\omega t$
- Mean. Bruk at $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \Rightarrow i^2 = \frac{1}{2}I^2 + \frac{1}{2}I^2\cos 2\omega t$.
  Middelverdi til $\cos 2\omega t$ er 0 (like mye positiv som negativ).
  Dermed: $\langle\cos 2\omega t\rangle = 0$, $\langle i^2\rangle = \frac{1}{2}I^2$.
- Root. $I_{RMS} = \sqrt{\langle i^2\rangle} = \frac{I}{\sqrt{2}}$

Samme sak for spenning: $V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}}$.

Resistans og reaktans

Vi vil nå se på hvordan spenning og strøm relateres til hverandre for AC kilder i kretser med ulike typer elementer.

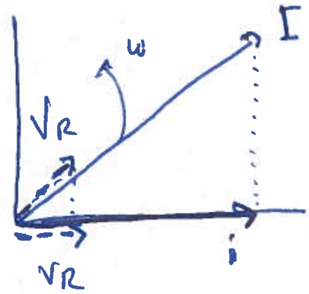
Resistor



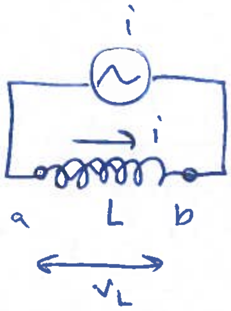
$i = I\cos(\omega t)$.

Ohm's lov: $v_{ab} \equiv v_R = iR \Rightarrow v_R = V_R\cos(\omega t)$ hvor $V_R = IR$.

Strøm og spenning er i fase:



Induktor



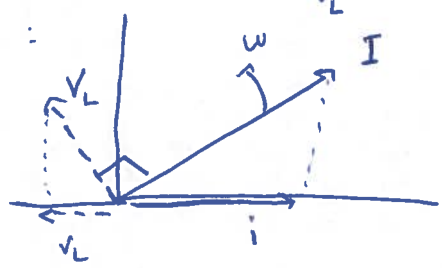
L induserer en EMS som vi har sett sørger for et spenningsfall $V_L = \frac{di}{dt} \cdot L$ mellom a og b.

(Spenning/potensial er assosiert med konservativ del av $\vec{E}$: gir ikke mening for ikke-kons.-del.)

Da får vi at $V_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{d(I\cos \omega t)}{dt} = -I\omega L \sin \omega t$

Kan skrives om til $V_L = \underbrace{I\omega L}_{V_L} \cos(\omega t + 90°) \Rightarrow$ strøm og spenning

er ute av fase :



Vi definerer fasevinkelen φ som fasen til v relativt i:

$i = I\cos(\omega t)$ og $v = V\cos(\omega t + \varphi)$.

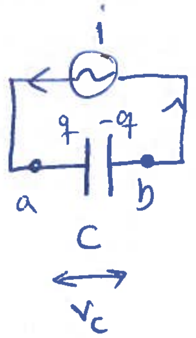
Selv om strøm og spenning er ute av fase, og dermed ikke direkte prop., kan vi definere forholdet mellom amplitudene deres :

Induktiv reaktans $\boxed{X_L = \omega L = \frac{V_L}{I}}$

Enhet Ω siden den er $\frac{V}{I}$. Fysisk betydning : sier noe om størrelsen på indusert EMS og spenning → raskere endring (stør ω), stør $\mathcal{E}$ og V. Kan da brukes til å separere høy- og lavfrekvenssignaler siden en variabel $v = V\cos(\omega t)$ da gir opphav til liten eller stør strøm (: høyfrekvens-signaler blir blokkert.

(Sett på gitt V_L : se hva slags strøm som kommer ut)

Kondensator

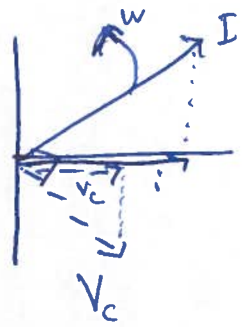


Vet at $i = \frac{dq}{dt} = I \cos \omega t$

$\Rightarrow q = \frac{I}{\omega} \sin \omega t.$

Instantan spenning over C er: $V_C = \frac{q}{C} = \frac{I}{\omega C} \sin \omega t.$

Kan skrives som $V_C = \frac{I}{\omega C} \cos(\omega t - 90^\circ) \Rightarrow$ fasevinkel -90°.



Kan definere forhold mellom maks spenning og strøm som for induktor:

$$\boxed{\frac{V_C}{I} = \frac{1}{\omega C} \equiv X_C : \text{ kapasitiv reaktans.}}$$

(Men husk at også her er strøm og spenning ut av fase og ikke prop.)

Har igjen $[X_C] = \Omega$.

Har altså motsatt effekt av X_L: X_C er liten for høye frekvenser og slipper da igjennom høy-frekvens strømmer, mens den er stor for lave frekvenser [$X_C \to \infty$ for $\omega \to 0$ (DC)].

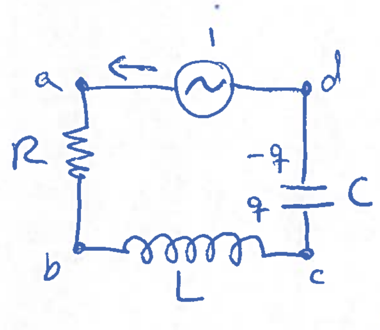
Kan da oppsummere som følger:

Kretselement	Forhold mellom amplituder	Kretsstørrelse	Fase til v
Resistor	$V_R = IR$	R	0 (i fase m/ strøm)
Induktor	$V_L = IX_L$	$X_L = \omega L$	$+90°$
Kondensator	$V_C = IX_C$	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$-90°$

(kan forenklet sett tenke på X som en generalisert frekvens-avhengig resistans for AC strømmer, men husk at fasen endres også)

L-R-C krets

La oss nå kombinere alle disse komponentene i én krets:



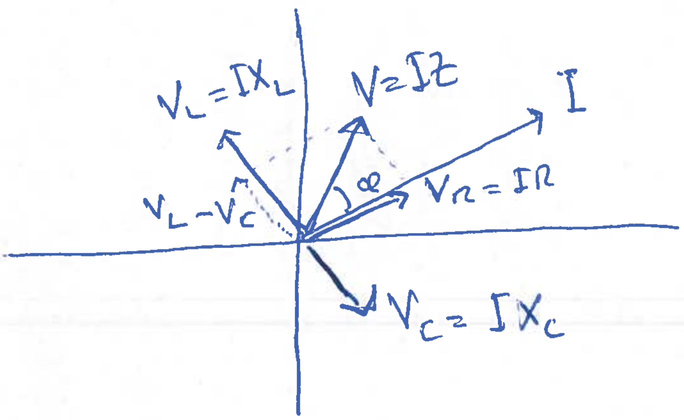
(~) er en kilde til AC EMS som dermed leverer en AC strøm.

Strømmen er den samme overalt siden dette er en seriekobling: $i = I\cos\omega t$.

Kirchhoffs lov sier at spenningen levert av kilden $v \equiv V_{ad}$ må være lik total potensialforskjell for samtlige komponenter:

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{da} = 0 \Rightarrow -V_{da} = V_{ad} = \underline{V_R + V_L + V_C}.$$

Her er det viktig å ta hensyn til at L og C fører til en faseforskyvning mellom v og i, så vi kan ikke bare legge sammen maks-amplitudene:



Total spenning er altså vektorsummen av de ulike bidragene.

Her antok vi $X_L > X_C$. Ser da at

$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$ fra Pytagoras sats.

$\Rightarrow V = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$. Definerer impedansen Z for en generell AC krets: $\boxed{V = IZ}$ hvor $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ for spesialtilfellet RLC-krets.

Z er altså en generalisering av resistans for vilkårlige AC kretser (serie eller parallell). Merk at Z er uendret for RLC-krets selv om vi antar $X_C > X_L$. Har $[Z] = \Omega$ (som $[X]$).

Z er (som reaktans X) en slags generalisering av resistans for generelle AC kretser.

DC strøm foretrekker å gå veien i kretsen med lavest R

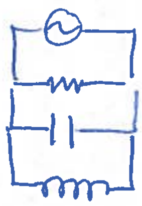
På samme vis: AC strøm har tendens til å gå hvor det er lavest Z, men merk at Z er frekvens avhengig. For RLC-krets:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}.$$

Hva med faseinkelen α? Fra viserdiagrammet ser vi at

$$\tan \alpha = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{X_R}$$

Anbefaler å prøve å gjøre tilsvarende analyse for en LRC parallell krets:

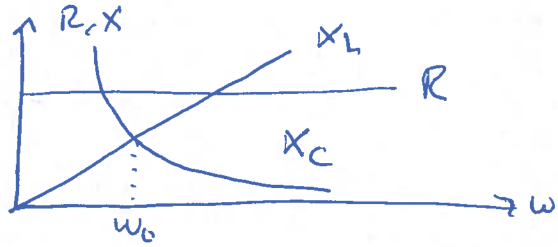


Resonans i AC-kretser

Viktigheten til LRC-kretser: ω-avhengigheten til strømmen. Avhengig av parametervalg for L, R, C så vil strømmen være maksimal for en gitt frekvens, nemlig den hvor Z er minst.

Dette kalles resonans.

Kan brukes til å velge ut en bestemt frekvens hvor vi vil ha et signal (f.eks. i radio). Vi vet at komponentene har følgende oppførsel mht. ω:



Vi fant at for seriekoblet RLC-krets var:

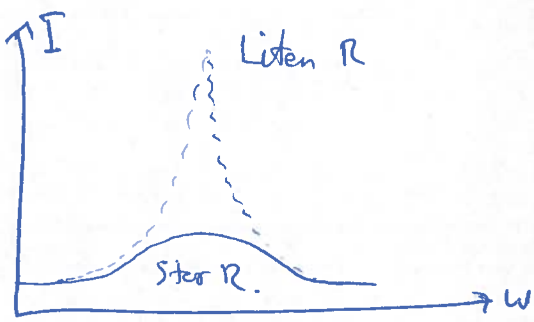
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$ Denne er minst når $X_L = X_C$

Som inntreffer eksakt ved $\omega = \omega_0$: resonansfrekvens.

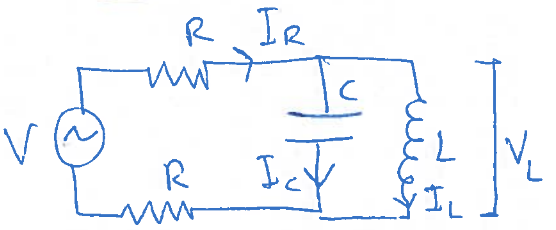
Den er gitt ved $X_L = X_C \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Ved denne frekvensen oppfører kretsen seg som om L og C ikke var til stede: $Z = R$ og i er i fase med V.

Jo lavere R er, jo skarpere blir resonanstoppen (I divergerer formelt for $R \to 0$):

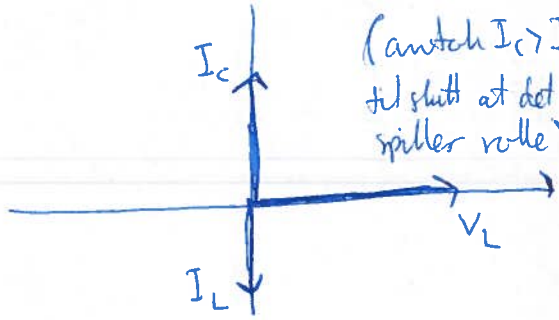


EKSEMPEL Visernotasjon for kombo serie + parallell.



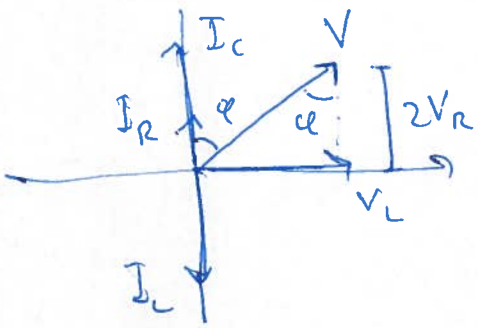
Finn fasevinkel φ og impedans Z.
Definerer I_R, I_C, I_L som vist samt V_L.

Velg en referansevektor og tegn de andre utfra den. Trenger ikke være V eller $I = I_R$. Velger V_L:



(antok $I_C > I_L$, ser til slutt at det ikke spiller rolle)

Kirchhoff gir nå at I_R må være vektorsummen av I_L og I_C:



Men V må være vektorsum av $2V_R$ og V_L. Vet at V_R og I_R er i fase: dermed $\tan\varphi = V_L / 2V_R$ hvor $V_R = I_R R$.

Trenger å finne et uttrykk for V_L. Vet at $V = \sqrt{(2IR)^2 + V_L^2}$.

Vet at amplitudene tilfredsstiller:

- $V_L = I_L X_L = (I_C - I_R) X_L$
- $V_L = I_C X_C = (I_L + I_R) X_C$

Alle V og I er her amplituder.

Da ser vi at: $V_L = \left(\frac{V_L}{X_C} - I_R\right) X_L \Rightarrow V_L = \frac{I_R X_L X_C}{X_C - X_L}$.

Da har vi: $V = I\sqrt{4R^2 + \left(\frac{X_L X_C}{X_C - X_L}\right)^2} \Rightarrow \underline{\underline{Z = \sqrt{4R^2 + \left(\frac{X_L X_C}{X_C - X_L}\right)^2}}}$

og $\underline{\underline{\tan\varphi = \frac{X_L X_C}{2R(X_C - X_L)}}}$

EKSEMPEL (oppg. 31.41 i YF) [sluttoks. for kap. 31].

Følgende komp. kobles sammen i ~~serie~~ parallell:

- P.p. kond. med firkantede plater (hver side 4.5 cm) i en avstand 8 mm fra hverandre.
- AC spenningskilde med amplitude 22.5 V og 650 rad/s.
- 75 Ω resistor
- Ideell solenoide som er 9 cm lang, tverrsnitts diameter 0.5 cm = d og har 125 viklinger/cm.

Finn resonans frekvensen til denne kretsen. (må altså her også bruke kunnskap fra tidl. kap.) hvor L og C ikke har noen effekt på impedansen.

Løsning: Har altså en RLC-krets og har utledet at $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Trenger C og L. Vet at $\underline{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 2.24 \cdot 10^{-12}\ F}$ $[A = (4.5\,cm)^2]$.

Induktans fra lang solenoide (i forhold til tverrsnitt):

$L = \frac{\mu_0 A N^2}{l}$. Her er $N = 125 \frac{\text{viklinger}}{cm} \cdot 9\,cm = 1125$ viklinger og

(utledet i forrige kap.) $A = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$. Dermed $\underline{L = 3.47 \cdot 10^{-4}\ H}$.

Setter inn: $\underline{\underline{\omega_0 \approx 3.6 \cdot 10^{7}\ rad/s}}$ (høy frekvens).

KAPITTEL 32: ELEKTROMAGNETISKE BØLGER

Læringsmål:

- Forstå hvorfor en elmag. bølge som propagerer må bestå av både el. og mag. felt.
- Hvordan lyshastigheten bestemmes av ε og μ (permittivitet og permeabilitet)
- Kunne beskrive propagering (forplanting) av en EM bølge og hvor mye energi den transporterer per tidsenhet (effekt).

Hva er lys? Svaret får vi (delvis) fra Maxwells likninger: i hvertfall det klassiske bildet hvor lys er en EM bølge. Kvantemek. vil dere lære at lys også oppfører seg som partikler i tillegg, men dette er en historie for en annen dag.

Maxwells likninger og EM bølger

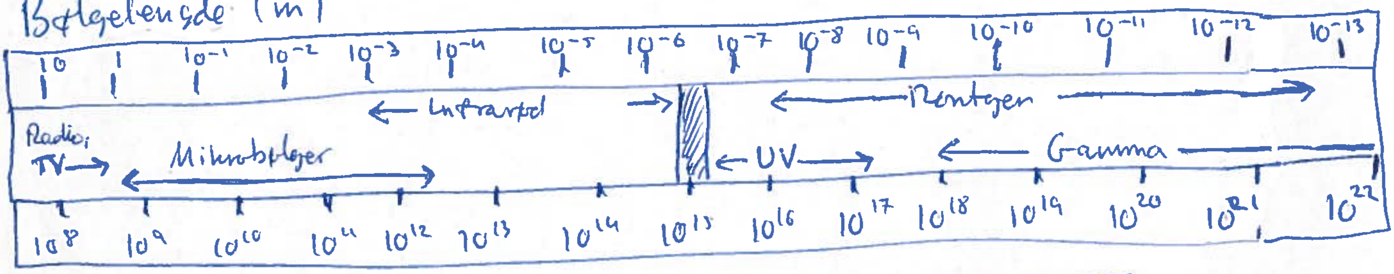
Vi har sett at $\vec{B}(t)$ induserer $\vec{E}$-felt mens $\vec{E}(t)$ induserer $\vec{B}$-felt. Idé: kan disse feltene da indusere og opprettholde hverandre og sammen utgjøre ~~et~~ EM objekt som beveger seg? I tillegg: $\underbrace{\text{dette}}_{\text{objektet}}$ burde isåfall kunne propagere i vakuum (dvs. uten et medium, som lydbølger) siden $\vec{E}$ og $\vec{B}$ felt kan eksistere i vakuum.

Slike objekter eksisterer: kaller de EM bølger og skal vise dette fra Maxwells likninger.

Det finnes mange typer EM bølger: karakterisert ved deres frekvens (akkurat som vi får ulik type lyd for ulike frekvenser) eller bølgelengde.

Elektromagnetisk spektrum

Bølgelengde (m)

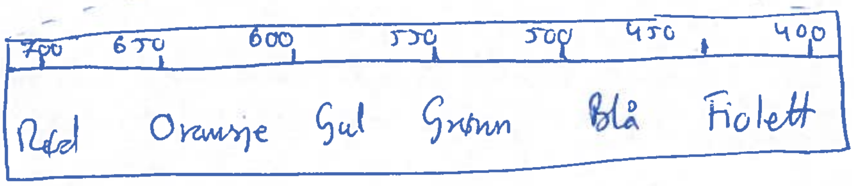


Frekvens (Hz)

= synlig lys

Fig. 32.4

Bølgelengde →



(nm)

(Tegn opp disse i pausen eller før forelesning for å spare tid.)

Grensene mellom ulike typer EM bølger er altså noe flytende.

Alle disse bølgene har samme hastighet i vakuum (bekreftet eksperimentelt):

$$c = \lambda f \approx 2.99 \cdot 10^8 \, m/s \qquad (\lambda : \text{bølgelengde}, \; f : \text{frekvens})$$

Hvitt lys er en blanding av alle synlige bølgelengder.

Monokromatisk lys $\equiv$ EM bølge bestående av én bestemt λ (eller veldig smalt intervall rundt λ)

Ulik bruk for de forskjellige typene bølger:

- Radio / TV: navnet sier det – global kommunikasjon
- Mikrobølger: mobiltelefoner, trådløse nettverk samt matlaging!
- Infrarød: kameraer (justere fokus basert på reflektert IR stråling)
- Røntgen: medisin, lage bilder hos f.eks. tannlege [de går gjennom kroppsvev (mykt)]
- Gamma: svært høy energi, går gjennom "alt". Brukes i medisin som kreftbehandling.

Beskrivelsen av nøyaktig hvordan EM stråling skapes kvantitativt er komplisert, men en kan vise fra Maxwells likn. at

- En ladning i ro skaper et statisk $\vec{E}$-felt. (✓)
- En ladning i bev. med konstant fart skaper et $\vec{B}$-felt (✓)
- En akselererende ladning skaper EM bølger.

Vi kommer i resten av kapittelet til å fokusere på beskrivelsen av bølgene når de først har oppstått – ikke nøyaktig hvordan de gjør det.

Gjentar Maxwell siden vi får bruk for det:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Gauss' lov)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(Gauss' lov for magnetisme)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_c + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{encl} \qquad \text{(Amperes lov)}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(Faradays lov)}$$

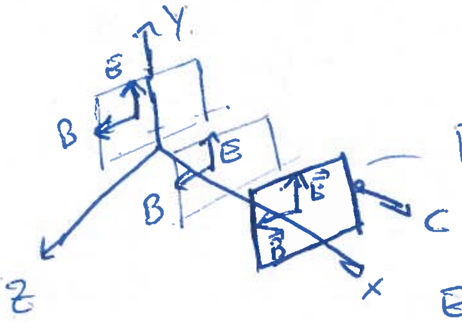
~~Dette gjelder for vakuum! I materiale: $\varepsilon_0 \to \varepsilon$, $\mu_0 \to \mu$~~
~~Dersom $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$, $\mu = \mu(\vec{r})$ må de flyttes innenfor~~
~~integralene [ε i Amperes lov flyttes inn i int. som gir $\frac{d\Phi_E}{dt}$].~~

$$\boxed{\text{EM planbølger og lyshastigheten}}$$

Vi viser her at eksistensen av EM planbølger er konsistent med Maxwell's lover så fremt lyshastigheten c har en bestemt verdi.

Planbølge: $\vec{E}$ og $\vec{B}$ ligger i et plan $\perp$ propageringsretningen (hastighet) til EM bølgen og er uniforme i det planet for gitt tid og posisjon til planet

Undersøker først om følgende elementære bølge er tillatt:

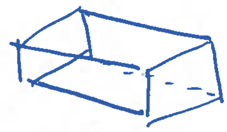


Bølgefront m/hastighet c

$E=0$
$B=0$ foran bølgefront.

Dette er "snapshot" ved gitt tid t. $\vec{E}$ og $\vec{B}$ er uniforme i hvert plan bak fronten.

En slik bølge tilfredsstiller $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$ og $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ for en vilkårlig 3D boks



siden det er null ladning inne i boksen. Merk at bølgen ville ikke tilfredsstilt dette dersom $E_x \neq 0$ eller $B_x \neq 0$, når vi velger høyre flate til å ligge foran bølgefronten. $\Rightarrow$ $\vec{E}$ og $\vec{B}$ må være $\perp \vec{v}$: transversal bølge.

Da gjenstår å sjekke Faradays lov og Amperes lov.
Dette kan gjøres ved å velge diverse testflater i xy- og zx-planet.
Full utledning i boken, her oppsummerer vi kun hovedresultatet:

Faradays lov er tilfredsstilt forutsatt at $E = cB$.
Amperes — " — $B = \varepsilon_0 \mu_0 c \cdot E$.

<u>Begge</u> relasjonene må være tilfredsstilte samtidig for konsistens med samtlige Maxwells lover $\Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 2.99 \cdot 10^8 \, m/s$: lyshastighet!

Planbølgen er altså konsistent med Maxwell hvis:

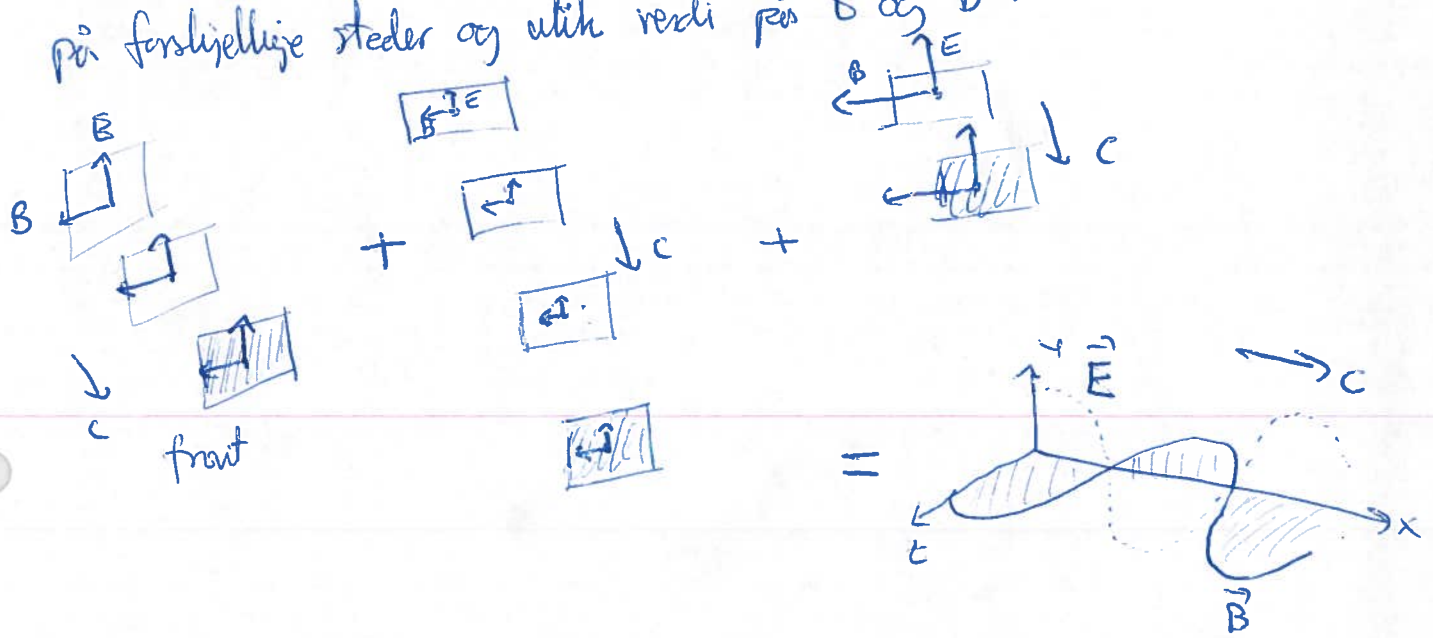
- Den er transversal ($\vec{E} \perp \vec{v}, \vec{B} \perp \vec{v}$) : $\vec{v} \parallel \vec{E} \times \vec{B}$.
- Den beveger seg med lyshastighet c.
- Forholdet mellom E og B er: $\frac{E}{B} = c$.

Merk hvordan bølgen ikke er avhengig av noe medium for å propagere: utregningene gjort i vakuum.

<u>Generalisering til romlig varierende planbølge</u>

Vi vet at $\vec{E}$ og $\vec{B}$ oppfyller superposisjonsprinsippet - dersom flere felt er til stede, er totalt felt helt enkelt summen av feltene.

Tenk deg at vi legger sammen <u>flere</u> bølger som har bølgefronter på forskjellige steder og ulik verdi på $\vec{E}$ og $\vec{B}$:



Fremdeles planbølge, men varierende langs propageringsretning.
$\vec{E}$ og $\vec{B}$ felt

Siden vi ~~måtte~~ ha $E = cB$, ~~er~~ $\vec{E}$ og $\vec{B}$ alltid i fase med hverandre.

Polariseringen til en EM bølge bestemmes utifra retningen $\vec{E}$ peker i.
Dersom $\vec{E}(x)$ alltid peker langs samme akse (selv om $|\vec{E}|$ varierer): lineært polarisert bølge. Enhver type EM bølge kan representeres som en superposisjon av bølger lineært polariserte langs aksene ⊥ prop. retningen. (kan også få sirkulært pol. bølger).

Man kan også utlede en formell bølgelikning (analogt som for mekaniske bølger) fra Maxwells likninger av typen (kjent fra mekanikk)

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

hvor $v = c$ for EM bølger og $\psi = \{E_y, B_z\}$

dvs. feltamplitudene for en bølge som propagerer i x-retning.

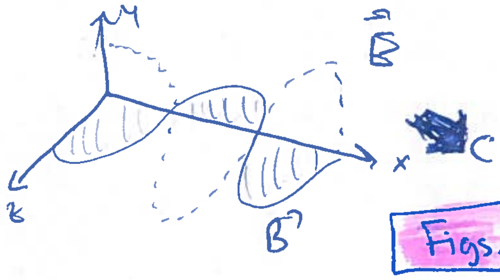
$\boxed{\text{Sinusoidale EM bølger}}$

Skal se nærmere på en bestemt type EM bølge:
harm. t avhengighet ved gitt posisjon x og samtidig harm. x avhengighet ved gitt tid t.

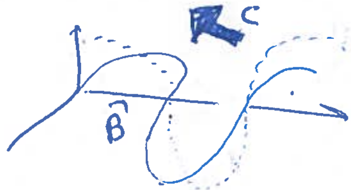
For en lineært polarisert sinusoidal bølge har vi dermed:

$E_y = E_{max}\cos(kx-\omega t)$, $B_z = B_{max}\cos(kx-\omega t)$

$\vec{E}\times\vec{B} \parallel \vec{v}$ (h.h. regel)



NB! Motsatt hastighet



Figs. 32.13 and 32.14

$\{E_{max}, B_{max}\}$: amplitudene til feltene

k: bølgetall definert ved $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ = bølgelengde)

ω: vinkelfrekvens definert ved $\omega = 2\pi f$ (f = frekvens)

Relasjon mellom λ og f er standard (som for mek. bølger)

$\boxed{c = \lambda f}$ for en periodisk bølge.

Vi vet at $\vec{E}$ og $\vec{B}$ må være i fase og at $E_{max} = c B_{max}$ for en EM bølge i vakuum. <u>NB!</u> En planbølge hvor $\vec{E}$ og $\vec{B}$ er likevel konstante i et gitt plan (dvs. uendelig rekkevidde) er en idealisering som er nyttig for å beskrive propagerende lysbølger innenfor et gitt areal (som de passerer igjennom) hvor feltene kan tas som tilnærmet konstante.

EM bølge i materie

EM bølger kan også propagere i materie: her generaliserer vi vårt tidligere rammeverk fra vakuum til dielektrika.

Vi har tidligere sett at pga. indusert polarisering i et dielektrikum, må vi la $\varepsilon_0 \to \varepsilon$. På samme vis: $\mu_0 \to \mu$. Dette påvirker lyshastigheten siden:

$$c \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_m}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}}.$$

Hastighet til EM bølge i dielektrikum: $\boxed{v = \frac{c}{\sqrt{KK_m}}}$

Minner om at K: dielektrisk konstant ($\varepsilon = K\varepsilon_0$)
og K_m: relativ permeabilitet ($\mu = K_m\mu_0$).

Anta ikke-magnetisk isolator: $K_m \approx 1 \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{K}}$.

Siden $K > 1$ for alle materialer, ser vi at $\boxed{v < c}$ holder uansett materiale. Forholdet $\frac{c}{v} \equiv$ brytningsindeks n til materialet.

Merk at K som vi listet opp tidligere er dielektrisk konstant for de (konstante) $\vec{E}$-felt. I realiteten er $\underline{K = K(\omega)}$ og K blir kraftig redusert for ac felt. Spør: hvorfor?

Svar: ikke tid for elektriske dipoler å reorientere seg når feltet bytter retning raskt $\Rightarrow$ lavere netto polariseringseffekt.

Energi og bev. mengde i EM bølger

Energien i EM bølger utnyttes i mange forskjellige sammenhenger:

sollys, mikrobølgeovn, laserkirurgi.

Utgangspkt. er likningene vi etablerte i tidligere kapittel for

energitetthet i $\vec{E}$ og $\vec{B}$ felt.

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Vi så istedet at for vakuum EM bølge måtte vi ha $E = cB$.

Innsatt: $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\, E\right)^2 = \varepsilon_0 E^2.$

$\rightarrow$ energitetthet for $\vec{E}$ = —"— for $\vec{B}$.

For en sinusoidal EM bølge i vakuum må $u = u(\vec{r}, t)$ siden

$\vec{E}$ (og $\vec{B}$) varierer.

Poyntings vektor

En bølge av typen vi har sett på, $\sim \sin(kx - \omega t)$,

propagerer gjennom rommet og transporterer energi.

Ønsker å uttrykke transportert energi pr. tid og pr. tverrsnittsareal

som bølgen beveger seg gjennom.

Betraktet et stasjonært plan som ved en gitt tid ligger i $\vec{E}-\vec{B}$ planet til bølgefronten:

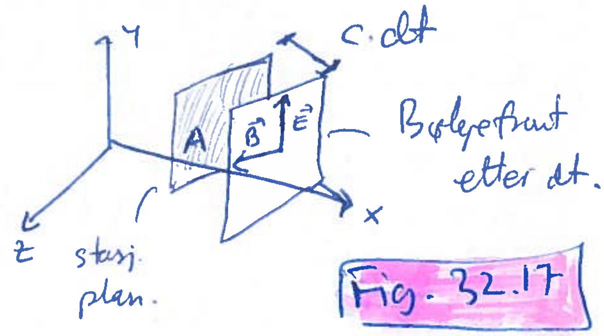


Fig. 32.17

Mengden energi som passerer arealet A i løpet av tiden dt må være lik energitetthet ganger volum til området mellom planene i figuren:

$$dU = u \cdot dV = u \cdot \underbrace{(A \cdot c \cdot dt)}_{dV} = \varepsilon_0 E^2 A c \cdot dt$$

Energiflyt pr. tid og areal er da:

$$S \equiv \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{dt} \cdot dU = \varepsilon_0 c E^2 \quad \text{(i vakuum)}.$$

Men vi vet at siden $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ og $E = cB$ får vi:

$$S = \frac{EB}{\mu_0}. \qquad [S] = \frac{W}{m^2} \quad \text{(effekt per areal)}.$$

Vi kan nå definere en vektor som både beskriver retning og størrelse til energiflyten:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}} \quad \text{(Poynting vektor)}$$

Kan da f.eks. beregne totalt energiflyt ut av et volum pr. tid ved å integrere $\vec{S}$ over arealet som innelukker volumet:

$$P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A}.$$

For sinusoidale bølger hvor $\vec{E} = \vec{E}(x,t)$ og $\vec{B} = \vec{B}(x,t) \Rightarrow \vec{S}$ er også en funksjon av t. For raskt varierende bølge er det mer praktisk å se på gjennomsnittsverdien $\langle \vec{S} \rangle$ for Poyntingverdier ved et gitt punkt i rommet. $\left(\langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S \, dt. \right)$

$$\langle |\vec{S}(x,t)| \rangle \equiv \text{intensiteten } I \text{ til EM stråling i } x.$$

La oss beregne dette for vår tidligere bølge:

$$\vec{E}(x,t) = \hat{y} E_{max} \cos(kx - \omega t), \quad \vec{B}(x,t) = \hat{z} B_{max} \cos(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} E_{max} B_{max} \cos^2(kx - \omega t) \hat{x}.$$

Siden $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ og $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos[2(kx - \omega t)] \, dt = 0$

er det kun konstantleddet i

$$S_x = \frac{E_{max} B_{max}}{2\mu_0} [1 + \cos 2(kx - \omega t)]$$ som bidrar til $\langle \vec{S} \rangle$.

Dermed: $\underline{\langle S_x \rangle} = \langle |\vec{S}| \rangle = \underline{\frac{E_{max} B_{max}}{2\mu_0} = I}$

('Halvparten av max utslag for S_x'). Gjennomsnittseffekt for energiflyt gjennom et areal A kan da uttrykkes som:

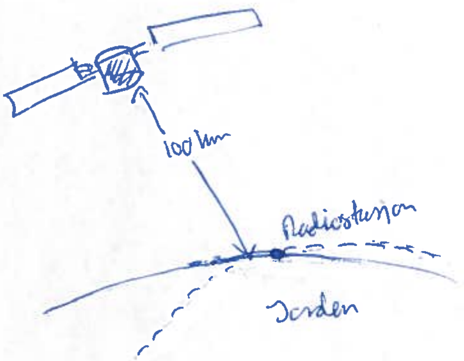
$$P_{average} = I \cdot A.$$

For en bølge som propagerer gjennom materie, gjør vi som vanlig:

$\varepsilon_0 \to \varepsilon$, $\mu_0 \to \mu$ og dermed $c \to v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$!

Det betyr at $u_E = u_B$ selv i materialer (bevises ikke her).

EKSEMPEL En radio stasjon sender ut en sinusoidal EM bølge med gjennomsnittseffekt 50 kW totalt. Anta en idealisert situasjon hvor strålingen emitteres likt i alle retninger over bakken. Finn E_{max} og B_{max} detektert av en satellitt 100 km unna.



Vet at intensitet I i en avstand $r = 100$ km må være

$I = \frac{P}{A}$ hvor $A = 2\pi r^2$ er overflate-arealet til en hemisfære.

Det gir $I = 7.96 \cdot 10^{-7}$ W/m².

Siden vi utledet at $I = \langle|\vec{S}|\rangle = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c}$ får vi:

$$E_{max} = \sqrt{2\mu_0 c I} = 2.45 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}.$$

Til slutt: $B_{max} = \frac{E_{max}}{c} = 8.17 \cdot 10^{-11}$ T (som påkrevd for at EM bølgen skal tilfredsstille Maxwells likn.).

Elektromagnetisk flyt av bevegelsesmengde og strålingstrykk

Vi brukte at $\vec{E}$ og $\vec{B}$ felt har en energitetthet til å utlede transportert energi av en EM bølge. Man kan også vise (gjøres ikke her*) at EM bølger transporterer bevegelsesmengde med en tetthet (bev. mengde per volum)

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2}$$

Kan forstås via partikkel-egenskapen til lys: fotoner bærer bev. mengde.

Dette er en egenskap til EM feltet. Finnes også en tilsvarende transportrate av bev. mengde: Siden $dV = A \cdot c \cdot dt$ får vi overført bev. mengde dp pr. areal A og tid dt:

$$\boxed{\frac{1}{A} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}}$$

(transportrate av elmag. bev. mengde).

Midlere transportrate får vi ved å ta $\frac{1}{A} \cdot \frac{\langle dp \rangle}{dt} = \frac{\langle S \rangle}{c} = \frac{I}{c}$.

Bev. mengden er ansvarlig for strålingstrykk: dersom en overflate absorberer en EM bølge må dens bev. mengde ha blitt overført til overflaten.

Vi vet at endring $\frac{dp}{dt}$ er lik en kraft på overflaten.

* Har å gjøre med at lys består av fotoner med $E = pc$ selv om massen er null, men kan også sees fra relativistiske, klassiske argumenter.

$\Rightarrow$ Trykk $P_{rad} = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt}$, men dette har vi jo vist:

$$\boxed{P_{rad} = \frac{I}{c}}$$ (EM bølge fullstendig absorbert).

Hva blir trykket om bølgen reflekteres fullstendig? (spør klassen)

To ganger så stort pga. reflektert bev. mengde: $\boxed{P_{rad} = \frac{2I}{c}}$ (reflektert EM bølge).