

Løsningsforslag til eksamen i TEP4170 Varme- og forbrenningsteknikk, 29. mai 2004.

Av: Kjell Erik Rian, Institutt for energi- og prosess-
teknikk, NTNU.

Oppgave 1:

a) Turbulent strømming: stokastisk fluktuierende, ikke-stasjonær, tredimensjonal rotasjonsstrømming med sterke dissipative og diffusive egenskaper. Turbulens er en egenskap til strømmingen og ikke til fluidet.

Turbulens oppstår i strømmingen fra fluidmekaniske ustabiliteter når de viskøse kreftene ikke er i stand til å dempe ut perturbasjoner i strømmingen (typisk for høye Reynolds-tall).

Turbulensen er spredt utover et vidt spekter av tids- og lengdeskalaer (små og store virvler).

I praktiske strømminger dominerer de turbulente transportmekanismene over de molekylære transportmekanismene; effektiv blanding skjer ved at „fluidballer“ transporteres med virvlene

(jfr. Prandtl's tankemodell). Dessuten forbedres den molekylære blandingen (diffusion) ved at turbulensen river opp og strekker fluid-elementer slik at en større del av strømmingen får gradienter i konsentrasjonen.

Energi tas fra middelstrømmingen og overføres til turbulensen. De store virvlene (storskala-turbulensen) brytes ned til mindre og mindre virvler, og den mekaniske energien transporteres videre fra de større (energirike) virvlene og ned til de minste virvlene (Kolmogorov- og Batchelor-skalaer) hvor den resterende mekaniske energien omgjøres til varme ved dissipasjon. Dissipasjonen foregår over et kontinuerlig spekter av lengdeskalaer, men størparten av dissipasjonen skjer i de minste virvlene.

Turbulent forbrenning: Turbulens forbedrer blandingen av brensel og oksidant, samt blandingen av kalde reaktanter og varme produkter \Rightarrow forbrenningen blir mer effektiv. Sterk turbulens kan imidlertid også gi slukning i (slukning avhenger av: - lokal blanding av stoff
- lokal varme transport
- kjemisk kinetikk)

Forbrenning \Rightarrow varmeutvikling \Rightarrow gass ekspanderer \Rightarrow turb. dempes
 \Rightarrow " " \Rightarrow oppdriftseffekter \Rightarrow turb. økes
 Varm gass \Rightarrow høyere viskositet \Rightarrow turb. dempes

b) Utleddning av den "eksakte" transportlikningen for turbulentenergien k :

1. Utgangspunkt: impulslikningen (ρu_i) med $g = \text{konst}$
2. Innfører oppdelingen $u_i = \bar{u}_i + u_i'$ og finner en likning for \bar{u}_i .
3. Trekker den siste likningen fra den første og får en likning for fluktasjonen $u' = u_i - \bar{u}_i$, dvs.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i') + \dots = \dots \right] = \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \dots = \dots \right] - \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{u}_i) + \dots = \dots \right]$$

4. Multipliserer likningen for fluktasjonen u_i' med fluktasjonen selv og får en likning for $\frac{1}{2} u_i' u_i'$

5. Midler denne likningen og får en likning for midlet turbulentenergi, $k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}$:

$$u_i' \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i') + \dots = \dots \right] = \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \frac{1}{2} u_i' u_i') + \dots = \dots \right]$$

$$\xrightarrow{\text{midler}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \underbrace{\frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}}_k) + \dots = \dots \right]$$

c) De ulike leddene i den "eksakte" k -likningen:

$\frac{\partial}{\partial t} (gk)$: transient ledd (lagringsledd)

$\frac{\partial}{\partial x_j} (gk \bar{u}_j)$: konvektivt ledd (transport med hovedstrømmingen)

$-\overline{g u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$: produksjonsledd (produksjon av k)

$\frac{\partial}{\partial x_j} (\mu \frac{\partial k}{\partial x_j})$: diffusjonsledd (viskøst)

$\frac{\partial}{\partial x_j} (-\frac{1}{2} \overline{g u'_i u'_j u'_i} - \overline{p' u'_j})$: ledd som uttrykker turbulens-diffusjon (modlet konvektiv transport med turbulensvirvler)

$\mu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$: dissipasjonsledd (overføring av mekanisk energi til termisk energi)

Ledd som må modelleres og hvordan dette blir gjort i "standard" k - ϵ -modell:

$\frac{\partial}{\partial x_j} (-\frac{1}{2} \overline{g u'_i u'_j u'_i} - \overline{p' u'_j}) \approx \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$ gradientmodell med turbulensviskositet, μ_t , og turbulens-prandtl-schmidt-tall, σ_k .

$-\overline{g u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \approx \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ gradientmodell (Reynoldsspenninger; analogi med modell for viskøs spenning)

$\mu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \approx \rho \epsilon$ der dissipationen ϵ modelleres ved en egen transport-ligning i k- ϵ -modellen.

Ellers har vi: $\mu_t = \rho \nu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}$

$$-\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

d) Homogen turbulens: statistisk uafhængig af placering i rummet (uafh. af x_i)

⇒ midlede turbulens størrelser (f.eks. korrelationer) har ikke rumlige gradienter, f.eks. $\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i' u_j'}) = 0$

⇒ midlede størrelser ændrer sig ikke ved translation af koordinatsystemet

Isotrop turbulens: statistisk uafhængig af retning

⇒ midlede størrelser ændrer sig ikke ved rotation af koordinatsystemet

(⇒ strømningen må i praksis være homogen)

Eks: $\overline{u_1'^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2}$

Skjærspenninger $\overline{u_i' u_j'} = 0 \quad (i \neq j)$

Turbulensfluxer $\overline{\rho' u_j'} = 0$

k-ligningen for isotrop turbulens: $\frac{dk}{dt} = -\rho \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$
 (med $\rho = \text{konst}$) $= -\epsilon$

Oppgave 2:

a) Har en enkel, ett-steps forbrenningsreaksjon:
 1 kg brensel + r kg oksidant \rightarrow (1+r) kg produkt

Transportlikning for massefraksjoner:
 (antar lik diffusjonskoeffisient for alle stoff)

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho Y_{br}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho Y_{br} u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho D \frac{\partial Y_{br}}{\partial x_j}) + R_{br}$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho Y_{oks}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho Y_{oks} u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho D \frac{\partial Y_{oks}}{\partial x_j}) + R_{oks}$$

Videre:

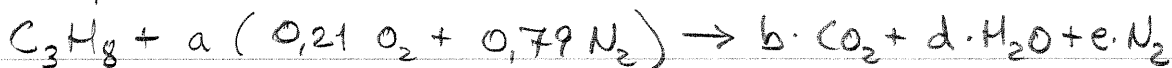
$$(1) - \frac{1}{r} \cdot (2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho [Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks}]) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho [Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks}] \cdot u_j) \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho D \frac{\partial [Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks}]}{\partial x_j}) + R_{br} - \frac{1}{r} R_{oks} \end{aligned}$$

Har at $R_{oks} = r \cdot R_{br} \Rightarrow R_{br} - \frac{1}{r} R_{oks} = \underline{0}$ ingen leiddedd

$\Rightarrow (Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks})$ er en konserverv skalar. g.e.d

b) Propan reagerer med luft:



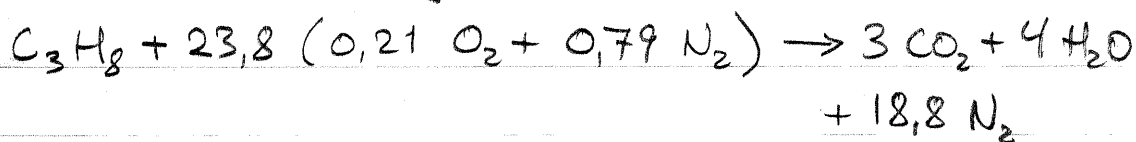
C: 3 = b

H: $8 = 2d \Rightarrow d = 4$

O: $0,21 \cdot 2 \cdot a = 2 \cdot b + d \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 3 + 4}{2 \cdot 0,21} \approx \underline{23,8}$

N₂: $0,79 \cdot a = e \Rightarrow e = \underline{18,8}$

Støkiometrisk reaksjon:



Støkiometrisk luftmengde på massebasis:

$$\underline{r} = \frac{23,8 \cdot 0,21 \cdot 32 + 23,8 \cdot 0,79 \cdot 28}{1 \cdot 44} \approx \underline{15,6}$$

Før konservert skalar $(Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks})$ har vi:

Innlepp (1): $Y_{br} = 1, Y_{oks} = 0, (Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks})_1 = 1 - 0 = \underline{1}$

Innlepp (2): $Y_{br} = 0, Y_{oks} = 1, (Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks})_2 = 0 - \frac{1}{r} \cdot 1 = \underline{-\frac{1}{r}}$

Vi kan skrive: $\underbrace{(Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks})}_{\varphi_1} = \xi \cdot (Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks})_1 + (1 - \xi) \cdot (Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks})_2$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

der f.eks.
 $\varphi = Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks}$

Ved støkiometrisk blandingsfraksjon ξ_s er

$$Y_{br} - \frac{1}{r} Y_{oks} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \xi_s \cdot 1 + (1 - \xi_s) \cdot (-\frac{1}{r}) \Rightarrow \underline{\xi_s = \frac{1}{1+r}}$$

$$\Rightarrow \underline{\xi_s = \frac{1}{1+15,6} \approx 0,06024 \approx \underline{0,06}}$$

Alle konserverte skalarene får samme blandingsfraksjon ξ . Derfor vil en løsning av en transportlikning for blandingsfraksjonen ξ gi oss de ulike konserverte skalarene.

$$c) \bar{R}_{br} = A \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \rho \cdot \min \left[\bar{Y}_{br}, \frac{1}{r} \bar{Y}_{oks}, B \cdot \frac{1}{1+r} \bar{Y}_{pr} \right]$$

$\bar{R}_{br} \hat{=}$ midlere reaksjonsrate for brensel

$A, B \hat{=}$ modellkonstanter

$\varepsilon \hat{=}$ dissipasjon av turbulensenergi } $\frac{\varepsilon}{k}$ uttrykker en

$k \hat{=}$ turbulensenergi

$\rho \hat{=}$ tetthet

$\bar{Y}_{br}, \bar{Y}_{oks}, \bar{Y}_{pr} \hat{=}$ midlere massefraksjoner } $\frac{\varepsilon}{k}$ uttrykker en
for brensel, oksidant og produkt (omsætnings hastighet)

$r \hat{=}$ støkiometrisk oksidantmengde

Dette er Magnussens forbrenningsmodell fra 1976, som er en såkalt "virvelmodell". Modellen tar utgangspunkt i at kjemiske reaksjoner skjer i regioner hvor nedbrytningen av virvlene (dissipasjonen) skjer.

Tidsskalaen $\frac{k}{\varepsilon}$ gir et mål på hvor raskt en mengde turbulensenergi omsettes (brytes ned), ert. $\frac{k}{\varepsilon}$ kan tolkes som en blandingstid.

Dersom en regner "uendelig rask" kemi, vil reaksjonen være styrt av blandingsprosessen eller virvelnedbrytningen. For å få en forbrenningsreaksjon må:

- reaktanter blandes molekylært
- varmt reaksjonsprodukt må komme nær og "tenne på" reaksjonen

I Magnussens modell er reaksjonen styrt av det stoffet det er minst av.

Modellen er utviklet og benyttet for forblandet og uforblandet forbrenning.

d) 3 faser ved dråpeforbrenning:

(I) Oppvarmingsfasen ("heating phase"):

Varme fra omgivelsene (gasfasen) varmer opp dråpeoverflaten. Varme transporteres inn til sentrum av dråpen inntil hele dråpen har nådd kokepunktstemperatur og masseetapet fra dråpen begynner.

(II) Brenselfordampningssteget ("fuel evaporation stage"):

Brensel (dråpen) fordampes til gasfase, og dråpestørrelsen avtar typisk etter en såkalt " d^2 -lov".

(III) Forbrenningsfasen ("combustion phase"):

Gasblandingen antennes og brenner som en kuleformet, symmetrisk, laminær uforblandet flamme. "Dråpe"-størrelsen avtar nå også typisk etter en " d^2 -lov" (men med en annen modellkonstant K).

K.E.R.

e) Forbrenning av n-heptan-dråpe i et 1-m langt brennkammer:

$$\text{Oppholdstid } \underline{t} = \frac{1\text{m}}{50\text{m/s}} = \underline{\underline{\frac{1}{50}\text{ s}}}$$

Fullstendig forbrenning av dråpe $\Rightarrow D=0$

Maksimal dråpestørrelse:

$$D^2 = D_0^2 - K \cdot t \Rightarrow D_0 = \sqrt{Kt} = \sqrt{a \cdot \ln(1+B) \cdot t}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_0}} = \sqrt{5,86 \cdot 10^{-7} \cdot \ln(1+5,82) \cdot \frac{1}{50}} \text{ m} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ = \underline{\underline{0,15 \text{ mm}}}$$

For forstøvet iso-oktan med samme maksimale dråpestørrelse:

Oppholdstid $t = \frac{1}{50}\text{ s}$ (den samme som før)

$$D_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$D^2 = D_0^2 - K \cdot t \Rightarrow \text{Ser på } K: B_{\text{iso-oktan}} > B_{\text{n-heptan}} \\ \Rightarrow K_{\text{iso-oktan}} > K_{\text{n-heptan}} \\ \Rightarrow \text{fullstendig forbrenning} \\ D_0 = \sqrt{Kt} \\ \Rightarrow D_{0, \text{iso-oktan}} > D_{0, \text{n-heptan}} \\ \text{ved samme } t.$$

∴ En iso-oktan-dråpe forstøvet til samme maksimale dråpestørrelse, vil derfor også forbrenne fullstendig ved $t = \frac{1}{50}\text{ s}$

(forutsatt at antagelsen om en d^2 -lov stemmer og at modellkonstanten a er den samme)

Oppgave 3

$$a) \quad \frac{d[N]}{dt} = k_{f,1} [N_2] [O] - k_{b,1} [NO] [N] - k_{f,2} [N] [O_2] \\ + k_{b,2} [NO] [O] - k_{f,3} [N] [OH] + k_{b,3} [NO] [H]$$

$$\frac{d[NO]}{dt} = k_{f,1} [N_2] [O] - k_{b,1} [NO] [N] + k_{f,2} [N] [O_2] \\ - k_{b,2} [NO] [O] + k_{f,3} [N] [OH] - k_{b,3} [NO] [H]$$

Den første foroverreaksjonen, dvs. $N_2 + O \xrightarrow{k_{f,1}} NO + N$, har høyest aktiveringsenergi og blir derfor den hastighetsbestemmende delreaksjonen i Zeldovich-mekanismen. Årsaken til den høye aktivitetsenergien er de sterke trippelbindingene i N_2 -molekylene. For å bryte opp disse trippelbindingene kreves det mye energi.

b) "Quasi-steady state" for N-atomene gir:

$$\frac{d[N]}{dt} \approx 0 \Rightarrow k_{f,1} [N_2] [O] - k_{b,1} [NO] [N]^{ss} - k_{f,2} [N]^{ss} [O_2] \\ + k_{b,2} [NO] [O] - k_{f,3} [N]^{ss} [OH] + k_{b,3} [NO] [H] \\ = 0$$

$$\Rightarrow [N]^{ss} = \frac{k_{f,1} [N_2] [O] + k_{b,2} [NO] [O] + k_{b,3} [NO] [H]}{k_{b,1} [NO] + k_{f,2} [O_2] + k_{f,3} [OH]}$$

$[]^{ss} \hat{=} \text{"steady-state"-konsentrasjon}$

c) $[O]^e$, $[O_2]^e$, $[H]^e$ og $[OH]^e$ er likeveldtskonsentrasjoner.

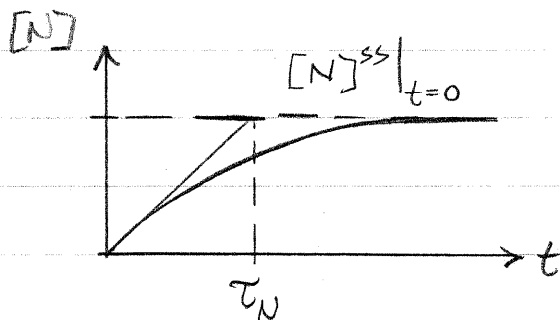
Antar likeveldtskonsentrasjoner for O, O₂, H og OH og får:

$$\frac{d[N]}{dt} = k_{f,1} [N_2] [O]^e - k_{b,1} [NO] [N] - k_{f,2} [N] [O_2]^e + k_{b,2} [NO] [O]^e - k_{f,3} [N] [OH]^e + k_{b,3} [NO] [H]^e$$

Ved $t=0$ er $[N]=0$ og $[NO]=0$.

$$\text{Fra før: } [N]^{ss} = \frac{k_{f,1} [N_2] [O]^e + k_{b,2} [NO] [O]^e + k_{b,3} [NO] [H]^e}{k_{b,1} [NO] + k_{f,2} [O_2]^e + k_{f,3} [OH]^e}$$

$$\Rightarrow [N]^{ss} \Big|_{t=0} = \frac{k_{f,1} [N_2] [O]^e}{k_{f,2} [O_2]^e + k_{f,3} [OH]^e}$$



$$\frac{d[N]}{dt} \Big|_{t=0} = k_{f,1} [N_2] [O]^e \approx \frac{[N]^{ss} \Big|_{t=0} - 0}{\tau_N}$$

$$\Rightarrow \underline{\tau_N} = \frac{[N]^{ss} \Big|_{t=0}}{\frac{d[N]}{dt} \Big|_{t=0}} = \frac{1}{k_{f,2} [O_2]^e + k_{f,3} [OH]^e} \quad \text{f.e.d}$$

Krav: $\tau_N \ll \tau_{NO}$