75042 Partielle differensialligninger

Oppgavesett #3 (til 1997–09–23) — løsningsforslag

Evans p. 152: 3: I rename (x_1, x_2) to (x, y) for convenience.
(a) We solve $u_x + u_y = u^2$ with initial data $u(x,0) = g(x)$. The characteristic equations are

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = z^2$$

and their solution is $x = t$, $y = t + A$, $z = 1/(B - t)$. (There should have been an integration constant in the solution for x, but I threw it away because I am free to choose the starting point of a parametrization of the characteristics. Of course, I can only throw away one integration constant this way.) Eliminate t to describe the characteristic curves as

$$y = x + A, \quad z = \frac{1}{B - x}.$$

A characteristic lying on the graph of the solution u must fit the initial data $u(x,0) = g(x)$, so that $z = g(x)$ when (x,y,z) is on the characteristic with $y = 0$. This happens when $x = -A$, so we must have

$$\frac{1}{B - (-A)} = g(-A) \text{ and therefore } B = -A + \frac{1}{g(-A)}.$$

Thus, passing back to the general form for the characteristic curve we get $A = y - x$, $B = x - y + 1/g(x - y)$, and so

$$u(x,y) = z = \frac{1}{B - x} = \frac{g(x - y)}{1 - yg(x - y)}$$

which does indeed solve the problem.
(b) We solve $xu_y - yu_x = u$ with initial data $u(x,0) = g(x)$. The characteristic equations are

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = z$$

with solutions $x = A\cos t$, $y = A\sin t$, $z = Be^t$. Here again we have thrown away a useless integration constant — to be added to t — in the expressions for x and y.

We note that the projected characteristics are circles in the (x,y) plane, and each of these cross the initial curve $y = 0$ twice. Since $|z|$ grows as we travel along a characteristic with increasing t, the initial data cannot be satisfied everywhere. If, however, we restrict our attention to the right half plane $x > 0$ there is no trouble at all.

We eliminate t from our equations for the characteristic and get $x^2 + y^2 = A^2$ and $z = B\exp\big(\arctan(y/x)\big)$. The initial data implies that we should have $z = g(x)$ when $y = 0$. At this point on the characteristic $x = A$, so we get Thus $B = g(A)$. In general, then, our solution becomes

$$u(x,y) = z = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\exp\left(\arctan\frac{y}{x}\right).$$

Evans p. 152: 4:
(a) We solve $xu_x + yu_y = \lambda u$ with initial data $u(x,1) = g(x)$. The characteristic equations are

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y, \quad \dot{z} = \lambda z$$

with solutions $x = Ae^t$, $y = Be^t$, $z = Ce^{\lambda t}$ (no integration constants thrown away this time). Eliminating t we get (using new constants)

$$x = \alpha y, \quad z = \beta x^\lambda$$

for the characteristics. It should be noted that no characteristic curve actually reaches $x = y = 0$. The characteristic curves starting at points with $y = 1$ can only reach the upper half plane therefore, so we only get a determined solution for $y > 0$.

The initial condition means that our characteristic curve should have $z = g(x)$ when $y = 1$, which happens at $x = \alpha$. So we get $\beta\alpha^\lambda = g(\alpha)$, that is $\beta = \alpha^{-\lambda}g(\alpha)$. Thus we get finally for our solution

$$u(x,y) = z = \alpha^{-\lambda}g(\alpha)x^\lambda = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^\lambda g\left(\frac{x}{y}\right)x^\lambda = y^\lambda g\left(\frac{x}{y}\right).$$

(b) We solve $uu_x + u_y = 1$ with data $u(x,x) = x/2$. The characteristic equations are

$$\dot{x} = z, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = 1$$

which we solve for z first, then for x and y, giving $z = t$ (we discarded the integration constant), $y = t + A$, and $x = t^2/2 + B$. Eliminating t we end up with

$$x = \frac{1}{2}z^2 + B, \quad y = z + A \tag{1}$$

for the general characteristic of the given equation.

The initial data says $z = x/2$ when $x = y$. To fit this with (1), we put $x = y = 2z$ to get

$$2z = \frac{1}{2}z^2 + B, \quad 2z = z + A.$$

The second equation implies $z = A$, which we substitute in the first equation to obtain

$$B = 2A - \frac{1}{2}A^2.$$

Finally we substitute this B value back into (1), use the second half of the equation to write $A = y - z$, which is also substituted in the first half, with the result

$$x = \frac{1}{2}z^2 + 2(y-z) - \frac{1}{2}(y-z)^2 = 2y - 2z - \frac{1}{2}y^2 + yz$$

which we solve for z to get the solution

$$u(x,y) = \frac{x - 2y + \frac{1}{2}y^2}{y-2}.$$

#3–1: Første del av denne besvarelsen blir vel nærmest en oppsummering av hva jeg gjennomgikk i forelesningen: Vi skriver eikonalligningen i to dimensjoner $u_x^2 + u_y^2 = 1$ på formen

$$F(p,q,z,x,y) = 0, \qquad z = u(x,y), \quad p = u_x(x,y), \quad q = u_y(x,y)$$

der vektoren som heter p hos Evans heter (p,q) her, og x er blitt til (x,y) — og F er gitt ved

$$F(p,q,z,x,y) = p^2 + q^2 - 1$$

De karakteristiske ligningene blir (se Evans (11) side 93)

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= -\mathrm{D}_xF - p\mathrm{D}_zF = 0,\\
\dot{q} &= -\mathrm{D}_yF - q\mathrm{D}_zF = 0,\\
\dot{x} &= \mathrm{D}_pF = 2p,\\
\dot{y} &= \mathrm{D}_qF = 2q,\\
\dot{z} &= p\mathrm{D}_pF + q\mathrm{D}_qF = 2(p^2+q^2)
\end{aligned}$$

slik at p og q blir konstante langs karakteristikkene, og vi finner

$$x = \xi + 2ps, \quad y = 2qs, \quad z = \zeta + 2(p^2+q^2)s = \zeta + 2s \tag{2}$$

hvor jeg har brukt ligningen $F = 0$, og samtidig har utnyttet friheten i valg av nullpunkt for parameteren s langs karakteristikken og valgt det der $y = 0$.

Initialdataene var gitt på formen $u(x,0) = g(x)$ med $g(x) = \sqrt{x^2+R^2}$ med tilleggskravet $u_y(x,0) > 0$. Vi kan derivere den første ligningen med hensyn på x og finner $u_x(x,0) = g'(x)$. Men eikonalligningen sammen med tilleggskravet bestemmer da u_y entydig langs x–aksen:

$$u_y(x,0) = \sqrt{1-g'(x)^2} = \sqrt{1-g'(x)^2} = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

hvor jeg har antatt at $R > 0$ (det kan neppe skade, siden R bare forekommer i formen R^2 i oppgaven).

Vi går nå tilbake til karakteristikken gitt ved (2) og ser at om vi setter $s = 0$ så krever initialdataene at $z = g(\xi)$, $p = g'(\xi)$ og $q = \sqrt{1-g'(x)^2}$. Dette gir da $\zeta = g(\xi)$, og siden p og q er konstanter langs karakteristikken kan vi endelig oppsummere at

$$\begin{aligned} x &= \xi + 2tg'(\xi) = \xi + \frac{2t\xi}{\sqrt{\xi^2+R^2}}, \\ y &= 2t\sqrt{1-g'(\xi)^2} = \frac{2tR}{\sqrt{\xi^2+R^2}}, \\ z &= 2t + g(\xi) = 2t + \sqrt{\xi^2+R^2} \end{aligned}$$

sammen med $(p,q) = (g'(\xi), \sqrt{1-g'(\xi)^2})$ bestemmer karakteristikken som ligger i løsningsflaten og inneholder punktet med $(\xi, 0)$.

Vi ønsker å eliminere ξ og t fra de tre ligningene ovenfor, og dermed uttrykke z som en funksjon av (x,y). Det krever en del fomling før man ser den enkleste måten å gjøre det på: Isolér $2t$ fra den tredje ligningen, og sett resultatet $2t = z - \sqrt{\xi^2+R^2}$ inn i de første to ligningene. Etter at vi har ganget med kvadratroten og ryddet litt har vi da de to på formen

$$x\sqrt{\xi^2+R^2} = z\xi, \quad (y+R)\sqrt{\xi^2+R^2} = zR$$

men om vi kvadrerer begge disse ligningene og legger sammen kan vi forkorte bort en felles faktor ξ^2+R^2 og står igjen med $x^2+(y+R)^2 = z^2$ og derfor

$$z = \sqrt{x^2+(y+R)^2}.$$

Vi måtte velge den positive kvadratroten på grunn av initialdataene.

Oppgavesett #4 (til 1997–09–30)

#4–1: Jeg har en følelse av at det er blitt litt vel mye regning på øvingsoppgavene, så vi tar en stille uke med bare en oppgave (fra eksamen 1995):

(a) Finn svake entropiløsninger (dvs svake løsninger som oppfyller entropibetingelsen) til Riemann-problemet

$$u_t + \frac{1}{4}\big((u^2-\pi^2)^2\big)_x = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}, t > 0) \tag{3}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x > 0 \end{cases} \tag{4}$$

i hvert av de to tilfellene

(i) $u_l = -\pi, \quad u_r = \pi$
(ii) $u_l = \pi, \quad u_r = -\pi$

(I ett av tilfellene kreves løsning av en tredjegradsligning for å skrive svaret på eksplisitt form. Ikke løs den ligningen, men la den stå på implisitt form.)

(b) Betrakt initialverdiproblemene for (3) i de to tilfellene

(iii) $u(x,0) = 2\operatorname{arctg} x$
(iv) $u(x,0) = -2\operatorname{arctg} x$

Hvorfor er det rimelig å forvente at løsningene har visse fellestrekk med løsningene fra forrige punkt? Tegn diagrammer som viser karakteristikker og sjokk i (x,t)-planet i de to tilfellene, og angi spesielt tidspunkt og posisjon der sjokk først oppstår. Du kan uten videre utregning benytte den informasjon du kan trekke ut av grafen til funksjonen $c(\xi) = 8\,\mathrm{arctg}^3\,\xi - 2\pi^2\,\mathrm{arctg}\,\xi$ og dens deriverte på figuren nedenfor.