Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen 73 59 35 25

EKSAMEN I FAG 75042 PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER

Mandag 8. desember 1997
Tid: 09:00–15:00

Hjelpemidler: A1
– Kalkulator ikke tillatt
– Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt

Oppgave 1

a) Løs initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} yu_x + xu_y &= xyu, \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

I hvilke punkter i planet blir løsningen entydig bestemt?

b) Betrakt en første ordens ikkelineær partiell differensialligning på formen

$$F(u_x, u_y) = 0. \tag{1}$$

Utled de karakteristiske ligningene for en kurve $\big(x(s), y(s), p(s), q(s), z(s)\big)$ med $p(s) = u_x\big(x(s), y(s)\big)$, $q(s) = u_y\big(x(s), y(s)\big)$ og $z(s) = u\big(x(s), y(s)\big)$.

Hint: Derivér de tre foregående ligningene med hensyn på s. Derivér (1) med hensyn på x og med hensyn på y, og forklar hvordan valget av $x(s)$ og $y(s)$ slik at $\dot{x} = F_p(p,q)$ og $\dot{y} = F_q(p,q)$ forenkler problemet og leder til de karakteristiske ligningene.

c) Løs initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_x^3 - u_y &= 0, \\ u(x,0) &= 2x^{3/2}. \end{aligned}$$

Oppgave 2 La $U = U(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

a) Vis at dersom Neumannproblemet

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \qquad && x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= g(x) && x \in \partial U \end{aligned}$$

har en løsning, så er

$$(3) \qquad \int_{\partial U} g(x)\,\mathrm{d}S = 0.$$

b) La v være løsningen av

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= 0 \qquad && x \in U \\ v(x) &= g(x) && x \in \partial U \end{aligned}$$

der g oppfyller (3). Vis at da er $v(0) = 0$.

c) La v være som over og definér

$$u(x) = \int_0^1 \frac{v(tx)}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \overline{U}.$$

Vis at da vil u løse (2).

d) Har (2) en entydig løsning, når (3) holder? Hvis ikke, hva kan du si om hvor forskjellige to løsninger kan være?

Oppgave 3 I denne oppgaven skal vi betrakte løsninger $u(x,t)$ for *reaksjons-diffusjons-ligningen* med gitte initial- og randdata i et åpent begrenset område $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ med glatt rand:

$$(4) \qquad \begin{aligned} u_t - \Delta u &= \psi(u), \qquad && x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) &= g(x), && x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) &= h(x,t), && x \in \partial\Omega, \quad 0 < t < T. \end{aligned}$$

a) Anta u og v er løsninger av (4), sett $w = u - v$, og sett

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(w(x,t)\big)^2\,\mathrm{d}x.$$

Vis at den deriverte til E oppfyller ulikheten

$$\dot{E} \le \int_\Omega w(x,t)\big(\psi(u(x,t)) - \psi(v(x,t))\big)\,\mathrm{d}x.$$

b) Anta at det finnes en konstant M slik at $|\psi(u) - \psi(v)| \le M|u - v|$ for alle u og v (det vil si at ψ er Lipschitz-kontinuerlig). Vis at (4) ikke har mer enn én løsning.

Hint: Vis ved derivasjon at $e^{-At}E(t)$ er ikkevoksende for en passe konstant A.

Oppgave 4 Betrakt initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x &= -u, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

a) Vis at dersom g er deriverbar med $g'(x) \ge -1$ for alle $x \in \mathbb{R}$ så har (5) en glatt løsning gyldig for alle $x \in \mathbb{R}$ og $t > 0$.

b) La

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \le -\frac{1}{2}, \\ -2x, & -\frac{1}{2} \le x \le 0, \\ 0, & x \ge 0. \end{cases}$$

og bestem en svak entropiløsning til (5). Skissér karakteristikker og sjokk for løsningen. Du kan anta uten bevis at Rankine-Hugoniot-betingelsen og entropibetingelsen er den samme som for den vanlige Burgers ligning $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$. (Du vil oppdage at alle karakteristikkene som starter i et punkt $(\xi, 0)$ med $-\frac{1}{2} \le \xi \le 0$ vil møtes samtidig i $x = 0$.)

Oppgave 5 I hvilke områder i planet er ligningen

$$u_{xx} + 4xu_{xy} + 4yu_{yy} = 0$$

elliptisk, hvor er den parabolsk, og hvor er den hyperbolsk? Bestem karakteristikkene i det hyperbolske området.

Hint: Skriv en karakteristisk kurve på formen $y = y(x)$. Utled et uttrykk for den deriverte y', og derivér en gang til. Det vil vise seg at $y'' = 0$, slik at karakteristikkene blir rette linjer.

Det kan være nyttig å vite følgende om familier av linjer og deres innhylningskurver: Om du har en parametrisert familie av rette linjer $y = a(k)x + b(k)$, vil disse linjene tangere innhylningskurven (engelsk: «envelope») til familien, som i sin tur består av alle punkter $(x, a(k)x + b(k))$ der k er bestemt ved $a'(k)x + b'(k) = 0$.