75042 Partielle differensialligninger 8. desember 1977

Løsningsforslag

Oppgave 1

a De karakteristiske ligningene blir

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = xyz.$$

Dette gir $\ddot{x} = x$, slik at $x = Ae^s + Be^{-s}$. Derivasjon gir da $y = Ae^s - Be^{-s}$. Velger vi parametriseringen av karakteristikkene slik at $y = 0$ for $s = 0$, må vi ha $B = A$. Dermed blir $\dot{z} = A^2(e^{2s} - e^{-2s})z$, som er separabel og grei å løse. Løsningen av alle ligningene samlet blir

$$x = A(e^s + e^{-s}), \quad y = A(e^s - e^{-s}), \quad z = C\exp\Bigl(\frac{1}{2}A^2(e^{2s} + e^{-2s})\Bigr).$$

Initialdataene krever $z = f(x)$ når $y = 0$, det vil si når $s = 0$. Herav får vi $C = e^{-A^2}f(2A)$.

Når vi nå vil eliminere A fra alle ligningene hjelper det å observere at vi finner $x^2 - y^2 = 4A^2$ og $x^2 + y^2 = 2A^2(e^{2s} + e^{-2s})$. Dette gir

$$z = e^{-(x^2-y^2)/4} f(\pm\sqrt{x^2 - y^2}) \exp\Bigl(\frac{1}{4}(x^2 + y^2)\Bigr)$$

slik at løsningen blir

$$u(x, y) = e^{y^2/2} f(\pm\sqrt{x^2 - y^2}).$$

Som vi har sett er karakteristikkene (eller projeksjonen av dem i xy-planet) hyperblene $x^2 - y^2 = 4A^2$. Disse dekker området $|x| > |y|$, og det er altså her løsningen blir entydig gitt. I løsningsformelen over må vi velge fortegnet positivt når $x > 0$ og negativt når $x < 0$, for argumentet til f er punktet på x-aksen som skjærer karakteristikken gjennom (x, y). (Ligningen har også karakteristikker $x^2 - y^2 = D$ med $D < 0$, men disse skjærer ikke x-aksen, og bidrar derfor ikke til løsningen.)

b Følger vi hintet og deriverer i vei, får vi

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \dot{x}u_{xx} + \dot{y}u_{xy},\\
\dot{q} &= \dot{x}u_{yx} + \dot{y}u_{yy},\\
\dot{z} &= \dot{x}u_x + \dot{y}u_y.
\end{aligned}$$

Derivasjon av (1) med hensyn på henholdsvis x og y gir på den annen hånd

$$\begin{aligned}
F_p(u_x, u_y)u_{xx} + F_q(u_x, u_y)u_{yx} &= 0,\\
F_p(u_x, u_y)u_{xy} + F_q(u_x, u_y)u_{yy} &= 0.
\end{aligned}$$

Hvis nå krever $\dot{x} = F_p(u_x, u_y)$ og $\dot{y} = F_q(u_x, u_y)$ så følger det umiddelbart av dette at ligningene for $\dot{p}$, $\dot{q}$ og $\dot{z}$ over reduseres til $\dot{p} = 0$, $\dot{q} = 0$, og $\dot{z} = pF_p + qF_q$. Oppsummert har vi altså disse karakteristiske ligningene:

$$\dot{x} = F_p(p,q), \quad \dot{y} = F_q(p,q), \quad \dot{z} = pF_p + qF_q, \quad \dot{p} = 0, \quad \dot{q} = 0.$$

c Dette er forrige punkt med $F(p,q) = p^3 - q$. De karakteristiske ligningene blir

$$\dot{x} = 3p^2, \quad \dot{y} = -1, \quad \dot{z} = 3p^3 - q$$

hvor p og q er konstante langs karakteristikkene. Dette gir oss uten videre

$$y = -s, \quad x = 3p^2 s + A, \quad z = (3p^3 - q)s + B.$$

(Vi setter $s = 0$ der $y = 0$ og blir slik kvitt en integrasjonskonstant.) Vi skal også ha $F(p,q) = 0$, slik at $q = p^3$. Initialdataene er gitt for $y = 0$, altså $s = 0$. Da blir $x = A$ og $z = B$, mens initialdataene krever $z = 2x^{3/2}$; altså er $B = 2A^{3/2}$. Det er på tide å oppsummere igjen, før vi går oss bort (jeg eliminerer s samtidig):

$$x = A - 3p^2 y, \quad z = 2A^{3/2} - 2p^3 y.$$

Vi mangler ennå litt: Vi har fortsatt to konstanter å bli kvitt, men bare to ligninger. Initialdataene $u(x,0) = 2x^{3/2}$ kan deriveres med hensyn på x og gi oss $p = u_x = 3x^{1/2}$ når $y = 0$. Men når $y = 0$ på vår karakteristikk blir $x = A$, altså er $p = 3A^{1/2}$. Våre to ligninger kan nå skrives

$$x = (1 - 27y)A, \quad z = 2(1 - 27y)A^{3/2}$$

nå kan løse den første mhp A, sette inn i den andre, og ende med

$$u(x,y) = z = \frac{2x^{3/2}}{\sqrt{1 - 27y}}.$$

Oppgave 2

a Om u løser (2) kan vi bruke divergensteoremet slik:

$$\int_{\partial U} g(x)\,\mathrm{d}S = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial U} \nu \cdot \mathrm{D}u\,\mathrm{d}S = \int_U \operatorname{div} \mathrm{D}u\,\mathrm{d}x = \int_U \Delta u\,\mathrm{d}x = 0.$$

(Vi må kreve at $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ for at dette argumentet skal være gyldig.)

b Middelverdisetningen for harmoniske funksjoner og (3) gir

$$v(0) = \fint_{\partial U} v(x)\,\mathrm{d}S = \fint_{\partial U} g(x)\,\mathrm{d}S = 0.$$

c Siden $v(0) = 0$ og v er harmonisk vil i hvert fall integralet som definerer u eksistere, siden integranden har en grense i venstre endepunkt. ($v(tx)/t \to x \cdot \mathrm{D}v(0)$ når $t \to 0$.) Derivasjon under integraltegnet gir

$$u_{x_i} = \int_0^1 v_{x_i}(tx)\,\mathrm{d}t, \quad u_{x_i x_i} = \int_0^1 t v_{x_i x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$$

slik at vi kan summere over i og få

$$\Delta u = \int_0^1 t\Delta v(tx)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Det gjenstår å sjekke randbetingelsen i (2). Men når $x \in \partial U$ er normalvektoren gitt ved $\nu = x$, slik at

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = x \cdot \mathrm{D}u(x) = \int_0^1 x \cdot \mathrm{D}v(tx)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(tx)\,\mathrm{d}t = v(x) - v(0) = g(x)$$

når $x \in \partial U$.

(Spesielt den første derivasjonen under integraltegnet trenger egentlig å rettferdiggjøres, på grunn av nevneren. Men vi finner (e_i er i-te enhetsvektor)

$$\frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \int_0^1 \frac{v(tx + the_i) - v(tx)}{th}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x_i}(tx + \theta the_i)\,\mathrm{d}t$$

hvor $0 < \theta < 1$ er en funksjon av x, t og h. Vi kan nå bruke uniform kontinuitet av v_{x_i} på kompakte mengder for å vise at dette konvergerer mot $\int_0^1 v_{x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$ når $h \to 0$.)

d Hvis u løser (2) vil også $u + C$ gjøre det, for enhver konstant C. Problemet har altså ikke entydig løsning. Anta u og v er to løsninger av (2), og la $w = u - v$. Da vil w løse den homogene utgaven av (2), altså med $g = 0$. Divergensteoremet anvendt på $w\mathrm{D}w$ gir

$$\int_U (|\mathrm{D}w|^2 + \Delta w)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial U} w \frac{\partial w}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S$$

men siden $\Delta w = 0$ i U og $\partial w/\partial \nu = 0$ p ∂U følger $\int_U |\mathrm{D}w|^2\,\mathrm{d}x = 0$, slik at $\mathrm{D}w = 0$. Altså er w konstant. Løsningen er entydig opp til en additiv konstant.

Oppgave 3

a Vi finner umiddelbart

$$\dot{E} = \int_\Omega w w_t\,\mathrm{d}x = \int_\Omega w\big(\Delta w + \psi(u) - \psi(v)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Presis samme anvendelse av divergensteoremet som i 2d gir så

$$\int_\Omega w\Delta w\,\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} |\mathrm{D}w|^2\,\mathrm{d}S \le 0$$

som satt inn i ligningen over gir

$$\dot{E} \le \int_\Omega w\big(\psi(u) - \psi(v)\big)\,\mathrm{d}x$$

som ønsket.

b Vi finner $|\psi(u) - \psi(v)| \le M|w|$, slik at

$$\dot{E} \le \int_\Omega \big|w\big(\psi(u) - \psi(v)\big)\big|\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega M|w|^2\,\mathrm{d}x = 2ME.$$

For en gitt A blir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-At}E) = e^{-At}(\dot{E} - AE) \le e^{-At}(2M - A)E$$

slik at $e^{-At}E$ er ikkevoksende dersom $A \ge 2M$. Siden $E(0) = 0$ følger $E(t) \le 0$ for alle $t > 0$, og dermed $E(t) = 0$ og $w = 0$. Det betyr at $u = v$, og problemet har entydig løsning (forutsatt at det overhode har en løsning).

Oppgave 4

a Ligningen kan skrives på kvasilineær form som

$$u_t + uu_x = -u$$

De karakteristiske ligningene blir

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = u, \quad \dot{u} = -u$$

Den første ligningen sier at vi like gjerne kunne brukt t som parameter på karakteristikken, slik vanlig er for konserveringslover. Langs en karakteristikk som starter i $(x,t) = (\xi, 0)$ blir da $u = g(\xi)e^{-t}$ (løsningen av $\dot{u} = -u$ med $u = g(\xi)$ for $t = 0$). Dermed kan vi integrere opp x, og få

$$x = \xi + \int_0^t g(\xi)e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \xi + g(\xi)(1 - e^{-t}).$$

Vi kan løse dette med hensyn på ξ, for gitt x og t, så lenge $\partial x/\partial\xi > 0$. Men vi finner

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 + g'(\xi)(1 - e^{-t}) \ge e^{-t}$$

dersom $g'(\xi) \ge -1$.

b I punkt a fant vi karakteristikkene. Vi kan oppsummere slik, for den gitte initialfunksjonen:

$$x = \begin{cases} \xi + (1 - e^{-t}) & \xi \le -\frac{1}{2}, \\ \xi(2e^{-t} - 1) & -\frac{1}{2} \le \xi \le 0, \\ \xi & \xi \ge 0. \end{cases}$$

Av dette er det tydelig at alle karakteristikkene med $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq 0$ møtes i $x = 0$ når $2e^{-t} = 1$, det vil si når $t = \ln 2$.

I dette øyeblikket oppstår et sjokk i $x = 0$. Sjokket får verdi e^{-t} på venstre side og 0 på høyre side, som tilfredsstiller entropibetingelsen for Burgers ligning. Hastigheten til sjokket blir, akkurat som for Burgers ligning:

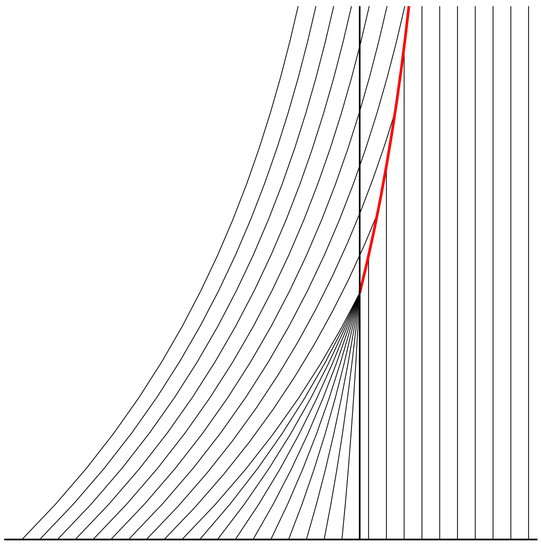
$$\dot{s} = \frac{\frac{1}{2}u_r^2 - \frac{1}{2}u_l^2}{u_r - u_l} = \frac{u_l + u_r}{2} = \frac{e^{-t}}{2}.$$

Av dette følger sjokkposisjonen:

$$s(t) = \frac{1}{2}\int_{\ln 2}^{t} e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Vi ender med

$$u(x,t) = g(\xi)e^{-t} = \begin{cases} e^{-t}, & x \leq \min(\frac{1}{2} - e^{-t}, \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-t}), \\ \dfrac{2x}{e^t - 2}, & \frac{1}{2} - e^{-t} \leq x \leq 0, \\ 0, & x \geq \max(0, \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{-t}). \end{cases}$$



Oppgave 5

Ligningens natur bestemmes ut fra diskriminanten, men i tilfelle hukommelsesbrist er det lettere først å se etter karakteristikker: Den karakteristiske betingelsen er gitt ved

$$\xi^2 + 4x\xi\eta + 4y\eta^2 = 0.$$

Det kan være greit å merke seg at det ikke finnes noen ikketriviell løsning med $\eta =$, så vi kan like godt sette $\eta = 1$. Det er diskriminanten til den resulterende annengradsligningen for ξ som interesserer oss. Den blir $D = (4x)^2 - 4(4y) = 16(x^2 - y)$.

Ligningen er elliptisk når det ikke finnes karakteristiske retninger, altså når $D < 0$: Det vil si for $y > x^2$. Den er parabolsk for $y = x^2$ (kun en karakteristisk retning), og hyperbolsk for $y < x^2$.

Karakteristikkene er gitt ved at de er ortonale på begge vektorene (ξ, η) bestemt over. I vårt tilfelle skal de altså være ortogonale på to vektorer på formen $(\xi, 1)$ med

$$\xi = \frac{1}{2}\big(-4x \pm \sqrt{D}\big) = -2\big(x \pm \sqrt{x^2 - y}\big).$$

Dette gir oss da

$$y'(x) = -\xi = 2\big(x \pm \sqrt{x^2 - y}\big).$$

og videre

$$y''(x) = 2 \pm \frac{2x - y'(x)}{\sqrt{x^2 - y}} = 0.$$

(Det er samme valg av fortegnet $\pm$ i y' og y''.) Siden karakteristikkene er rette linjer er dermed y' konstant langs en karakteristikk, som gir $x + k = \mp\sqrt{x^2 - y}$ for en passe k (konstant på hver karakteristikk). Kvadrerer vi og rydder får vi $2kx + y + k^2 = 0$. Vi finner innhylningskurven ved å derivere med hensyn på k og sette resultatet lik null: $2x + 2k = 0$. Vi setter derfor inn $k = -x$ i $2kx + y + k^2 = 0$ og finner $y = x^2$. Dette var akkurat parabelen som avgrenser det hyperbolske området, og vi har funnet at karakteristikkene er tangenter til denne parabelen.

(En rask kontroll: Parabelen $y = x^2$ har stigningskoeffisient $2x = -2k$ i punktet $(x, y) = (-k, k^2)$. Tangenten gjennom dette punktet har derfor ligning $y = -2k(x + k) + k^2$, som er det samme som ligningen $2kx + y + k^2 = 0$ vi fant tidligere. Gitt (x, y) finnes det to løsninger k til denne ligningen, nemlig $k = -x \mp \sqrt{x^2 - y}$. Linjen oppfyller $y' = -2k = 2(x \pm \sqrt{x^2 - y})$ som stemmer med regnestykket ovenfor.)