**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Hanche-Olsen 73 59 35 25

EKSAMEN I FAG 75042 PARTIELLE DIFFERENSIALLIGNINGER

Fredag 17. januar 1997
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: A1
— Kalkulator ikke tillatt
— Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt

Oppgave 1

a) Løs problemet

$$xu_x - yu_y = u - 2xy^2, \quad u(x,x) = 2x^3.$$

I hvilken del av planet er løsningen entydig gitt?

b) Løs problemet

$$xuu_x + u_y = 2y, \quad u(x,0) = x.$$

(Du kan neppe finne en *eksplisitt* løsning, men en implisitt ligning som bestemmer u i nærheten av x–aksen.)

Oppgave 2

La $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tilfredsstille

$$\Delta u = pu \quad \text{i } \Omega, \qquad u + q\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{på } \partial\Omega$$

der Ω er et åpent, begrenset område i planet med glatt rand, $p \in C(\Omega)$, $q \in C(\partial\Omega)$, og $p \geq 0$ og $q \geq 0$. Vis at da er $u = 0$ i hele Ω. Hva kan du si om randbetingelsen erstattes med $\partial u/\partial\nu = 0$ på $\partial\Omega$? *Hint*: Se på $\operatorname{div}(uDu)$.

Oppgave 3 Vis at det finnes høyst en løsning $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^1(\overline{\Omega}_T)$ for problemet

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{i } \Omega_T, \\ u &= g \quad \text{i } \Omega \times \{0\}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= h \quad \text{i } \partial\Omega \times (0,T) \end{aligned}$$

der Ω er et begrenset område i $\mathbf{R}^n$ med glatt rand, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, og f, g og h er gitte funksjoner.

Oppgave 4 La $f \in C(\mathbf{R}^3)$ ha kompakt støtte. Forklar hvordan man kan finne en begrenset løsning u til problemet

$$\Delta u = f \quad \text{i } \mathbf{R}^3,$$

og vis at det ikke finnes andre løsninger. Anta så at f i tillegg oppfyller

$$\int_{\mathbf{R}^3} f \, \mathrm{d}x = 0$$

og vis at da er $u(x) = O(|x|^{-2})$ når $|x| \to \infty$.

Oppgave 5 Ut fra Kirchhoffs formel

$$u(x,t) = ⨍_{\partial B(x,t)} \big(th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y-x)\big) \mathrm{d}S(y)$$

for løsningen av problemet

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad (t > 0), \\ u(x,0) &= g(x), \\ u_t(x,0) &= h(x) \end{aligned}$$

i $\mathbf{R}^3$ (egentlig $x \in \mathbf{R}^3$ og $t \geq 0$), bestem løsningen av det tilsvarende problemet i $\mathbf{R}^2$. Hvilken kvalitativ forskjell (bortsett fra den opplagte, at løsningsformlene ser ganske forskjellige ut) gir dette mellom løsningene av bølgeligningen i to og tre romdimensjoner?

Oppgave 6 Betrakt initialverdiproblemet

$$u_t + (\cos u)_x = 0 \quad (x \in \mathbf{R}, t > 0),$$
$$u(x,0) = x \quad (x \in \mathbf{R}).$$

a) Vis at problemet ikke har noen glatt løsning for alle $t > 0$. For hvilke (x,t) oppstår diskontinuiteter i løsningen?

b) Forklar kort hva som menes med en svak entropiløsning av det gitte problemet. Du kan regne som gitt at det ikke finnes mer enn én slik løsning. Vis at denne *a priori* må oppfylle $u(-x,t) = -u(x,t)$ og $u(x+2\pi,t) = u(x,t) + 2\pi$. Bestem den svake entropiløsningen, og tegn en skisse som viser karakteristikker og sjokk. (Med *a priori* menes uten først å finne løsningen. Løsningen kan for øvrig ikke beskrives ved en eksplisitt formel.)

Oppgave 7 I hvilke deler av planet er ligningen

$$(x^2 - 1)u_{xx} + (y^2 - 1)u_{yy} + 2xyu_{xy} = 0$$

henholdvis elliptisk, parabolsk og hyperbolsk? Bestem karakteristikkene til ligningen.