Løsningsforslag Matematisk modellering
Øving 2, høst 2005

Arne Morten Kvarving / Harald Hanche-Olsen

18. september 2005

Oppgave 3 – The Boussinesq transformation:

Vi skal se på ligningen

$$\mathrm{Pe}\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\nabla^2 T. \tag{1}$$

Det første vi gjør er å finne de partiellderiverte uttrykt ved ϕ og ψ:

$$\frac{\partial}{\partial x}=u\frac{\partial}{\partial\phi}-v\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=v\frac{\partial}{\partial\phi}+u\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=u^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-2uv\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\psi}+v^2\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=v^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+2uv\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\psi}+u^2\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}. \tag{5}$$

Vi setter så (2)-(5) inn i (1), og trekker sammen. Dette gir

$$\begin{gathered}\mathrm{Pe}\left(u^2+v^2\right)\frac{\partial T}{\partial\phi}=\left(u^2+v^2\right)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial\psi^2}\right)\\ \Updownarrow\\ \mathrm{Pe}\frac{\partial T}{\partial\phi}=\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial\psi^2}.\end{gathered} \tag{6}$$

Vi skal så finne grensebetingelsene i de nye variablene. Strømningsfunksjonen ϕ er gitt på side 29 i boka. Der er den gitt i polarkoordinater. I kartesiske koordinater blir den

$$\phi=U\left(x+\frac{a^2x}{r^2}\right).$$

Men nå skal $w(z)=\phi+\mathrm{i}\psi$ være holomorf (analytisk), og med $z=x+iy$ og $r=|z|$ passer dette med

$$w(z)=\phi+\mathrm{i}\psi=U\left(z+\frac{a^2}{z}\right).$$

Dette betyr at

$$\phi=U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)x,\quad \psi=U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)y.$$

Fra dette ser vi at grensebetingelsene blir

$$
\begin{aligned}
T &= T_0, \qquad |\phi| \leqslant 2Ua, \quad \psi = 0 \\
T &= T_\infty, \qquad |\phi| + |\psi| \to \infty
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Oppgave 5 – Newton's law of cooling and Biot numbers

Vi har gitt ligningen

$$
-k \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\text{boundary}} = h\,(T - T_\infty)\,. \tag{8}
$$

Enkel analyse av enhetene på venstre side (eller oppgaveteksten) gir at

$$
[h] = \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2\,s\,K}}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{K\,s^3}}\right].
$$

At energi vil lekke ut i fra overflaten på legemet er åpenbart (dette forklarer minustegnet). Det er heller ikke ufornuftig at energitapet er proporsjonalt med temperaturforskjellen mellom legemet og omgivelsene.

Siden Stefan–Boltzmans lov gir en varmefluks må

$$
[K] = \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s\,K^4}}\right] = \left[\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{K^4\,s^3}}\right]. \tag{9}
$$

For å vise at Newtons lov er en god tilnærming til Stefan–Boltzmans lov vises bruker vi sekantsetningen. Denne sier at

$$
KT^4 - KT_\infty^4 = 4K(T^*)^3\,(T - T_\infty) \tag{10}
$$

for en eller annen $T_\infty \leqslant T^* \leqslant T$. Så lenge $T - T_\infty$ ikke er for stor kan vi anta at denne sekanten er en god tilnærming til den faktiske kurven. Sammenligner vi dette med Newtons lov finner vi at

$$
h = \frac{4K(T^*)^3}{S} \approx \frac{4K(T_\infty)^3}{S} \tag{11}
$$

hvor S er overflatearealet av legemet.

Det første vi gjør når vi skal skrive problemet på dimensjonsløs form er å bruke Buckinghams Pi-teorem til å finne de dimensjonsløse kombinasjonene av parametrene i problemet. Vi finner $n = 5$ og $r = 4$ så vi venter å finne $k = 1$ dimensjonsløs størrelse. Denne er gitt ved

$$
\mathrm{Bi} = \frac{hL}{k}.
$$

Vi lar $T' = \frac{T - T_\infty}{T_0}$, $x = Lx'$ og $y = Ly'$. Med disse skaleringene får vi

$$
-\frac{kT_0}{L}\frac{\partial T'}{\partial n'} = hT_0T',
$$

som gir formen oppgitt i oppgaven. (Så vi kunne oppdaget Biot-tallet direkte fra ligningen, uten å gjøre dimensjonsanalyse først.)

Oppgave 6 – Coffee time

Her må vi gjøre en del antagelser. De første antagelsene vi gjør er at vi kan bruke Newtons lov, og at hele energitapet skjer i overgangen kaffe-luft (termokopp). Vi lar

- V_m = volum av melken.
- V_k = volum av kaffen.
- S = overflatearealet til kaffen – antar konstant (veldig flink kaffebærer).
- c_k = spesifikk varmekapasitet for kaffe – antar at denne er lik for kaffe og melk også.
- c_m = spesifikk varmekapasitet for melk.
- T_∞ = romtemperatur – antar lik i hele huset.
- T_k = temperaturen til kaffen når den kommer ut fra maskinen.
- T_m = temperaturen til melken når den blir slått i koppen – antar at $T_m < T_\infty$.
- τ = tid det tar å gå tilbake til kontoret.

Hvis vi lar $T' = T - T_\infty$ er temperaturforandringen gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}T'}{\mathrm{d}t} = \frac{-h}{c_k} T' S,$$

som gir

$$T' = T'_0 e^{-hSt/c_k}. \tag{12}$$

Temperaturforandringen i kaffen grunnet tilsetning av melk er gitt ved

$$\Delta T = \frac{(T - T_m)\, c_m V_m}{c_k V_k}. \tag{13}$$

Dette betyr at hvis han slår i melken ved maskinen er $\Delta T = \left(T_k - T_m\right) c_m V_m / c_k V_k$ som gir $T'_0 = T_k - \Delta T - T_\infty$. Setter vi dette inn i løsningen for T' får vi

$$T' = (T_k - \Delta T - T_\infty) e^{-hS\tau/c_k}.$$

Hvis vi slår i melken på kontoret er $T'_0 = T_k - T_\infty$. Så trekker vi fra ΔT (husk at ΔT avhenger av T') Dette gir

$$T' = \frac{(T_k - T_\infty) e^{-hS\tau/c_k} - \left(T' + T_\infty - T_m\right) \alpha}{1 + \alpha}$$

hvor $\alpha = c_m V_m / (c_k V_k)$. Siden $\alpha > 0$ og $T_\infty > T_m$ sier modellen at det lønner seg å slå i melken ved maskinen.

Hvor mye sukker som oppløses er åpenbart avhengig av arealet som er i kontakt med kaffen. En mulighet er at volumet er direkte proporsjonalt, slik som modellen foreslår.

Hvis vi går ut fra at de oppgitte størrelsene er de eneste relevant, er det bare en måte å forme en dimensjonsløs størrelse på, nemlig $\pi_1 = A/V^{2/3}$. Dette gir umiddelbart at $A \propto V^{2/3}$.

Vi skal så finne løsningen til modellen, som er gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -C_1 V^{2/3}.$$

Dette er en separabel diffligning, og etter integrasjonen ender vi opp med

$$V(t) = \frac{1}{3} (t_0 - C_1 t)^3. \tag{14}$$

Vi ser herfra at $V = 0$ for $t = t_0$, altså i endelig tid.

Vi skal så løse diffligningen

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = V^{2/3} \qquad t > 0 \tag{15}$$

med initialbetingelse $V(0) = 0$. Én triviell løsning er $V(t) = 0$ for alle $t \geq 0$. Men det er ikke den eneste! Betingelsene for entydighet av løsningen til initialverdiproblemet er ikke oppfylt: Funksjonen $f(V) = V^{2/3}$ er ikke C^1. Eller bedre: Den er ikke Lipschitz – det finnes ingen konstant L slik at $|f(V) - f(V')| \leq L|V - V'|$ for alle V, V'. Men den er Lipschitz i ethvert intervall $[\delta, \infty)$ der $\delta > 0$.

Dersom $V \neq 0$ kan denne separable ligningen løses slik: Vi skriver den på formen $V^{-2/3}\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}t$ og integrerer, som gir $3V^{1/3} = t - t_0$, altså $V = \frac{1}{27}(t - t_0)^3$.

Siden denne løsningen er null for $t = t_0$, og det nettopp er når $V = 0$ at vi ikke kan bevise entydighet av løsnignene, må vi studere dette litt nærmere. Og da blir det klart at vi kan «skjøte sammen» den trivielle løsningen $V = 0$ og den vi nettopp fant. Den generelle løsningen av det gitte initialverdiproblemet blir

$$V = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{1}{27}(t - t_0)^3 & t > t_0 \end{cases}$$

hvor $0 \leq t_0 \leq \infty$ (så den trivielle løsningen svarer ti $t_0 = \infty$).

For å finne ut når en sukkerbit ble lagt i kaffen basert på tilstanden den er i nå, må vi løse den gitte differensiallignen med en «initialverdi» (egentlig en sluttverdi) $V(t_{\text{observert}}) = V_{\text{observert}}$, for så å bestemme $V(0)$.

Vi «snur tiden» og bruker som uavhengig variabel $t' = t_{\text{observert}} - t$. Dette gir modellen $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t' = V^{2/3}$ med initialverdien $V = V_{\text{observert}}$ for $t' = 0$. Det er presis dette problemet vi har sett ikke har entydig løsning dersom $V_{\text{observert}} = 0$.

En fysisk tolkning av dette er at etter at sukkerbiten er fullstendig oppløst er det umulig å si noe om når den faktisk ble fullstendig oppløst.

Oppgave 7 – Boiling an egg

Vi har fått oppgitt varmeledningsligningen

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T \tag{16}$$

med grensebetingelse

$$-k \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=a} = h\left(T - T_w\right). \tag{17}$$

Vi lar

- $T = T_0 + (T_1 - T_0)\, T'$
- $T_w = T_0 + (T_1 - T_0)\, T'_w$
- $t = \dfrac{a^2}{\kappa} t'$ (hvor $\kappa = \dfrac{k}{\rho c}$)
- $x = ax'$
- $y = ay'$.

Setter vi disse skaleringene inn i (16) får vi

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} = \nabla^2 T'. \tag{18}$$

Grensebetingelsen (17) blir

$$\left.\frac{\partial T'}{\partial r'}\right|_{r'=1} = \mathrm{Bi}\left(T' - T'_w\right). \tag{19}$$

Fra dette ser vi at den eneste dimensjonsløse parameteren i problemet er Biot-tallet.

Nei, vent! Vi har ikke fått med tiden t_0! I overensstemmelse med skaleringen over setter vi $t_0 = (a^2/\kappa)\tau$, så vannet varmes opp i løpet av dimensjonsløs tid τ. Merk at a^2/κ er en tidskonstant som er karakteristisk for egget: Det er omlag den tiden det tar for egget å bli gjennomvarmt. Dette svarer til dimensjonsløs tid 1, så om $\tau \gg 1$ har egget god tid til å bli gjennomvarmt, men om $\tau \ll 1$ vil det bare bli varmt nær overflaten.

Men størrelsen på Biot-tallet er nok også relevant her. Jeg har på følelsen at vi ikke har gjennomdrøftet dette, så vi får komme tilbake til det.