Løsningsforslag Matematisk modellering
Øving 1, høst 2005

Arne Morten Kvarving / Harald Hanche-Olsen

18. september 2005

Oppgave 11 – Rowing

Det totale volumet okkupert av roerne blir NV. Vi har

$$\begin{aligned}[NV] &= \left[\mathrm{m}^3\right]\\ [A] &= \left[\mathrm{m}^2\right]\end{aligned}$$

slik at en dimensjonsløs kombinasjon av disse er $\pi_1 = A/(NV)^{2/3}$. Fra dette følger umiddelbart at $A \propto (NV)^{2/3}$.

For å vise at motstandskraften kan være gitt ved $F_d = \rho U^2 A$ ser vi nok en gang på dimensjonene. Vi har

$$[\rho U^2 A] = \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}\right] = [\mathrm{N}]\,.$$

slik at dette er iallefall et mulig uttrykk for motstandskraften. (Dimensjonsanalysen gir da også bare én uavhengig dimensjonsløs kombinasjon av F_d, ρ, U og A, nemlig $F_d/(\rho U^2 A)$.)

Her bruker vi gode gamle arbeid = kraft · vei for å finne energitapet per sekund. Dette gir en ekstra faktor U slik at vi får $W \propto \rho U^3 A$.

Til slutt bruker vi energibalanse for å få uttrykket gitt i boken. Vi får

$$\begin{aligned} NP &\propto \rho U^3 A\\ NP &\propto \rho U^3 (NV)^{2/3}\\ U^3 &\propto N^{1-2/3} P^1 \rho^{-1} V^{-2/3}\\ \Rightarrow U &\propto N^{1/9} P^{1/3} \rho^{-1/3} V^{-2/9}. \end{aligned}$$

Med $P \propto m$ og $V \propto m$ gir dette $U \propto N^{1/9}\rho^{-1/3} m^{1/9}$. Fra dette ser vi at størrelse er en (svak) fordel for roeren.

Oppgave 12 – Similarity solution to the heat equation

Vi har fått gitt problemet

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ T(x,0) = 0, \quad T(0,t) = T_0 > 0. \tag{1}$$

Vi skal vise at dette problemet har en similaritetsløsning gitt ved

$$T = T_0 F\left(\frac{x}{\sqrt{\kappa t}}\right). \tag{2}$$

Det første vi gjør er å sette (2) inn i (1). Dette gir (etter litt forenkling)

$$-\frac{\xi}{2} F'(\xi) = F''(\xi)$$

hvor $\xi = x/\sqrt{\kappa t}$. Vi lar så $y = F'$, setter dette inn og løser den resulterende ordinære differensialligningen. Dette gir

$$y = C_0 e^{\xi^2/4}.$$

Vi integrerer så dette for å finne F. Vi bruker her en substitusjon gitt ved $s' = \frac{\xi}{2}$ for å få uttrykket på høyre side til å være på formen erf(ξ). Vi får

$$F = C_1 + C_0' \operatorname{erf}(\xi/2) \Rightarrow T = T_0(C_1 + C_0' \operatorname{erf}(\xi/2))$$

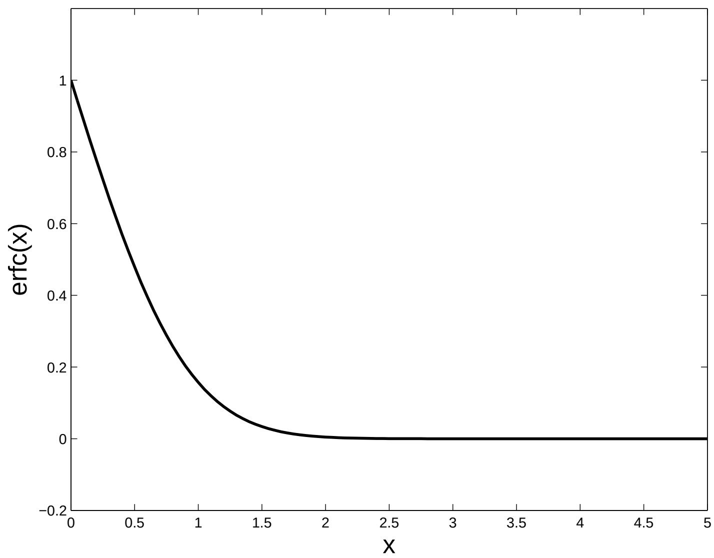
Vi bruker så grense- og initialbetingelsene for å bestemme konstantene. Vi får

$$T(0,t) = T_0(C_1 + C_0 \operatorname{erf}(0)) = T_0 C_1 = T_0 \Rightarrow C_1 = 1$$
$$T(x,0) = T_0(1 + C_0 \lim_{\xi\to\infty} \operatorname{erf}(\xi)) = T_0(1 + C_0) = 0 \Rightarrow C_0 = -1.$$

Dette betyr at vi har

$$F = 1 - \operatorname{erf}(\xi/2), \quad T = T_0(1 - \operatorname{erf}(\xi/2)) = T_0 \operatorname{erfc}(\xi/2).$$

Dette er en similærløsning siden de begge kun avhenger av parameteren ξ.



Figur 1: Plot of the function erfc(ξ) against ξ.

Som vi ser avtar funksjonen raskt mot 0 fram til $\xi \approx 1$. Dette stemmer godt overens med diskusjonen på slutten av avsnitt 2.2. Når $\xi = 1$ er $x = \sqrt{\kappa t}$, altså har temperaturforandringen rukket å propagere så langt inn i materialet.

Oppgave 13 – Firewalking

Vi vet at varmefluksen er gitt ved $Q = k\nabla T$. Med $T = T_0\,\mathrm{erfc}\big(x/(2\sqrt{\kappa t})\big)$ betyr dette at varmefluksen i $x=0$ er

$$Q = -\frac{kT_0}{\sqrt{\pi\kappa t}} = -T_0\sqrt{\frac{\rho c k}{\pi t}}$$

(husk at $\mathrm{erfc}'(0) = -2/\sqrt{\pi}$ og $\kappa = k/(\rho c)$). Er det kanskje en trykkfeil i boken her? Eller kanskje forfatteren tenkte på varmefluksen integrert over et tidsintervall opp til tid t? I så fall blir denne (om vi ser bort fra minustegnet)

$$q = \int_0^t T_0\sqrt{\frac{\rho c k}{\pi\tau}}\,\mathrm{d}\tau = 2T_0\sqrt{\frac{\rho c k t}{\pi}}$$

som stemmer med fasitsvaret. (Så da tolker vi spørsmålet slik.)

Setter vi så inn $T_0 = 500\,\mathrm{K}$, $t = 0.5\,\mathrm{s}$ og de oppgitte verdiene for trekull får vi $q \approx 80\,\mathrm{kJ/m^2}$.

La inntrengningsdybden være δ ($\delta = 1\,\mathrm{mm}$). Temperaturforandringen i foten vil være gitt ved

$$\Delta T = \frac{q}{\rho c \delta} \approx 19\,\mathrm{K}.$$

En bedre analyse får vi ved å sy sammen to similaritetsløsninger som i oppgave 12. Vi må generalisere oppgave 12 til å ha initialdata $T(x,0) = T_1$ og randdata $T(0,t) = T_0$ som før, og får svaret

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)\,\mathrm{erfc}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\Big),$$

som gir en varmefluks

$$|Q| = |T_1 - T_0|\sqrt{\frac{\rho c k}{\pi t}}.$$

Om vi nå setter to medier sammen, ett med initiell temperatur T_1 og ett med initiell temperatur T_2, kan vi sette sammen disse to løsningene til en med en konstant temperatur T_0 på grenseflaten mellom de to, der varmefluksen ut av det ene mediet er lik varmefluksen inn i det andre, forutsatt at

$$(T_2 - T_0)\sqrt{\rho_2 c_2 k_2} = (T_0 - T_1)\sqrt{\rho_1 c_1 k_1}.$$

Dette gir for temperaturen på grenseflaten:

$$T_0 = \frac{T_1\sqrt{\rho_1 c_1 k_1} + T_2\sqrt{\rho_2 c_2 k_2}}{\sqrt{\rho_1 c_1 k_1} + \sqrt{\rho_2 c_2 k_2}}.$$

Vi trenger en verdi for k_{fot}. La oss bruke verdien for vann: 0.591 (i SI-enheter). Alt dette gir (stadig i SI-enheter, hva nå SI-enheten for $\sqrt{\rho c k}$ blir for noe)

$$\Big(\sqrt{\rho c k}\Big)_{\mathrm{tre}} = 219, \quad \Big(\sqrt{\rho c k}\Big)_{\mathrm{fot}} = 1575, \quad \Big(\sqrt{\rho c k}\Big)_{\mathrm{stål}} = 14421.$$

Dette viser klart at overflatetemperaturen når vi går på glødende kull ligger mye nærmere fotens temperatur enn kullets ($T_0 \approx 0.88T_{\mathrm{fot}} + 0.12T_{\mathrm{tre}}$), slik at den tilnærmede beregningen av varmefluksen slik vi gjorde det ovenforr er en god tilnærming. Hvis vi går på glødende stål blir det omvendt: Overflatetemperaturen på foten blir nå nær stålets ($T_0 \approx 0.1T_{\mathrm{fot}} + 0.9T_{\mathrm{stål}}$), og varmefluksen blit tilsvarende mye større.