Stabilitet og bifurkasjon: To eksempler fra Logan

Utdraget fra Logan i kompendiet inneholder to eksempler (perle på en roterende ring og slimsopp) hvor forfatteren unnlater å ikkedimensjonalisere problemet. Her skal jeg vise hvordan analysen ser ut på ikkedimensjonal form. Beskrivelsen her er ikke komplett! Se Logan for detaljene.

Perle på en roterende ring. Modellen kan skrives

$$mR\frac{d^2\theta}{dt^{*2}} = -mg\sin\theta + mR\omega^2\sin\theta\cos\theta.$$

Med samme skalering av tidsvariabelen som i analysen av pendelen:

$$t^* = \sqrt{\frac{R}{g}}t \qquad \text{og med } \mu = \frac{R\omega^2}{g}$$

havner ligningen på formen

$$\ddot\theta + \sin\theta = \mu\sin\theta\cos\theta.$$

Likevekt fordrer $\ddot\theta = 0$, altså enten $\sin\theta = 0$ eller $\mu\cos\theta = 1$. Det siste er selvsagt kun mulig når $\mu \geq 1$. Bifurkasjonsdiagrammet blir omtrent som Logans figur 6.8, med μ på den horisontale aksen og skjæringspunktet i $\mu = 1$.

Lineariseringen av ligningen rundt likevektspunktet $\theta = 0$ blir

$$\ddot{\tilde\theta} + (1-\mu)\tilde\theta = 0.$$

Denne er stabil presis når $1-\mu > 0$, altså $\mu < 1$.

Lineariseringen rundt et likevektspunkt $\theta = \theta_0$ der $\mu\cos\theta_0 = 1$ blir etter litt regning

$$\ddot{\tilde\theta} + \frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\tilde\theta = 0$$

som alltid er stabilt fordi koeffisienten foran $\tilde\theta$ er positiv.

Slimsopp. Den uskalerte modellen kan skrives

$$\begin{aligned}\frac{\partial a^*}{\partial t^*} &= k\frac{\partial^2 a^*}{\partial x^{*2}} - l\frac{\partial}{\partial x^*}\Big(a^*\frac{\partial c^*}{\partial x^*}\Big),\\ \frac{\partial c^*}{\partial t^*} &= D\frac{\partial^2 c^*}{\partial x^{*2}} + q_1a^* - q_2c^*.\end{aligned}$$

Vi kan skalere fire variable: a^*, c^*, x^* og t^*, mens ligningene over har fem koeffisienter. En dimensjonsløs kombinasjon av de fem koeffisientene kommer vi ikke utenom, men resten kan skaleres bort, for eksempel med

$$a^* = \frac{q_2k}{q_1l}a, \quad c^* = \frac{k}{l}c, \quad x^* = \sqrt{\frac{k}{q_2}} \quad t^* = \frac{1}{q_2}t$$

som gir

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(a\frac{\partial c}{\partial x}\Big),\\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \delta\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + a - c.\end{aligned}$$

En likevektsløsning er gitt ved $a = c = a_0$ (konstant). Linearisering rundt denne leder til

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde a}{\partial t} &= \frac{\partial^2\tilde a}{\partial x^2} - a_0\frac{\partial^2\tilde c}{\partial x^2},\\ \frac{\partial\tilde c}{\partial t} &= \delta\frac{\partial^2\tilde c}{\partial x^2} + \tilde a - \tilde c.\end{aligned}$$

Vi søker en løsning på formen

$$\tilde a = a_1e^{\alpha t + i\beta x}, \quad \tilde c = c_1e^{\alpha t + i\beta x}$$

som leder til

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta^2 & -a_0\beta^2 \\ 1 & -1 - \alpha - \delta\beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som har ikketrivielle løsninger når determinanten er null:

$$\alpha^2 + (1 + \delta\beta^2 + \beta^2)\alpha + \beta^2 + \delta\beta^4 - a_0\beta^2$$

Røttene α_1 og α_2 oppfyller

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= -(1 + \delta\beta^2 + \beta^2) < 0, \\ \alpha_1\alpha_2 &= \beta^2 + \delta\beta^4 - a_0\beta^2. \end{aligned}$$

Hvis røttene er komplekse er de komplekskonjugerte av hverandre, og har da begge negativ realdel ved den første ligningen, så vi har stabilitet. Hvis røttene er reelle med $\alpha_1\alpha_2 > 0$ er begge negative, så vi har stabilitet. Dermed har vi instabilitet presis når $\alpha_1\alpha_2 < 0$, altså når

$$1 + \delta\beta^2 < a_0.$$

Dette krever $a_0 > 1$, og skjer da for små β, det vil si store bølgelengder.