TMA4195 Matematisk modellering 2003

Øving 10

Veiledning: 2003–11–17

1: (Eksamen januar 1994, oppgave 3)

En insektsverm med tetthet $\rho/x^*, t^*)$ befinner seg i et rør parallelt med x^*-aksen. I svermen bidrar «tilfeldig flukt» («diffusjon») til å spre insektene, mens de under svermingen også trekkes inn mot sentrum av svermen. Denne siste effekten kan en modellere som en driftshastighet w på formen

$$w(x^*, t^*) = -K\Big(\int_{-\infty}^{x^*} \rho(s^*, t^*)\, ds^* - \int_{x^*}^{\infty} \rho(s^*, t^*)\, ds^*\Big).$$

Vi vil anta at den totale mengden insekter

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x^*, t^*)\, dx^*$$

er konstant.

(a) Gjør rede for at modellen for w ikke er urimelig, og still opp bevarelsesloven for insekter på integralform.

(b) Før inn den kumulative fordelingen av insekter,

$$v^*(x^*, t^*) = \int_{-\infty}^{x^*} \rho(s^*, t^*)\, ds^*,$$

og vis fra bevarelsesloven at v^* tilfredsstiller ligningen

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} = \sigma \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} - K(M - 2v^*)\frac{\partial v^*}{\partial x^*}$$

der σ er «diffusjonskonstanten». Vi antar at både σ og K er konstanter.

(c) For en sverm med utstrekning L opptrer to karakteristiske tidsskalaer,

$$T_K = \frac{L}{KM} \quad \text{og} \quad T_D = \frac{L^2}{\sigma}.$$

Hva betyr disse skalaene? Skalér ligningen for v^* når $x^* = \mathcal{O}(L)$, $t^* = \mathcal{O}(T_K)$ og $T_D \gg T_K$, og vis at den da kan skrives på formen

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (1 - 2v)\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Hva betyr ε?

(d) Bestem $\rho^*(x^*, t^*)$ hvis

$$\rho^*(x^*, 0) = \begin{cases} \dfrac{M}{2L}, & |x^*| < L, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

når vi ser bort fra virkningen av diffusjonen. Hvordan forventer en (kvalitativt) at den eksakte løsningen er når en tar med diffusjonsleddet?

(e) For å undersøke løsningen i (d) etter lang tid, er det naturlig å betrakte en lengdeskale $L' = \sigma/(KM)$ (hvorfor?) og en tidsskala $T \gg T_K, T_D$. Vis at med denne skaleringen blir ligningen for v uavhengig av t til ledende orden. Verifisér at ligningen til ledende orden har en løsning som gir oss

$$\rho^*(x^*, t^*) = \frac{A}{\cosh^2(Bx^*)}$$

og bestem A og B for løsningen i (d).

Oppgitt:

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

(*Vink*: Prøv med en v som har rett oppførsel når $x \to -\infty$ og $x \to \infty$.)