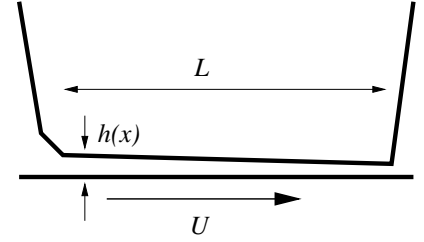


TMA4195 Matematisk modellering 2003

Øving 6

Veiledning: 2003–10–21

Oppgave 1: *Klassisk smøringsteori* beskjeftiger seg med strømning av en viskøs væske (smøreolje) i et tynt lag mellom to bevegelige deler. I figuren er den øverste delen stasjonær, mens den nederste beveger seg mot høyre med hastighet U . Vi antar lengden av mellomrommet i bevegelsesretningen er L , mens den variable tykkelsen er $h^*(x^*) \approx \varepsilon L$, hvor ε er en liten positiv konstant. Navier–Stokes-ligningene for stasjonær strømning av et inkompressibelt Newtonsk fluid i mellomrommet er



$$\begin{aligned} u^* \partial_{x^*} u^* + v^* \partial_{y^*} u^* &= -(\partial_{x^*} p^*)/\rho + \nu(\partial_{x^* x^*} u^* + \partial_{y^* y^*} u^*), \\ u^* \partial_{x^*} v^* + v^* \partial_{y^*} v^* &= -(\partial_{y^*} p^*)/\rho + \nu(\partial_{x^* x^*} v^* + \partial_{y^* y^*} v^*), \\ \partial_{x^*} u^* + \partial_{y^*} v^* &= 0 \end{aligned}$$

der jeg for korthets skyld har brukt notasjonen $\partial_{x^*} u^*$ for $\partial u^*/\partial x^*$ (en enda mer kompakt notasjon som ofte brukes, er $u_{x^*}^*$). u^* og v^* er hastighetskomponentene i strømningen, og ν er den kinematiske viskositeten til smøreoljen. Randbetingelsene er

$$u^* = U, v^* = 0 \text{ for } y^* = 0, \quad u^* = v^* = 0 \text{ for } y^* = h^*(x^*).$$

(a) Vi skal bruke følgende skaleringer:

$$x^* = Lx, \quad y^* = \varepsilon Ly, \quad u^* = Uu, \quad v^* = \varepsilon Uv.$$

Diskutér disse skaleringene. Virker de fornuftige? Det er mindre klart hvordan trykket skal skaleres, så vi setter $p^* = Pp$ der P er en ukjent trykkskala. Anta at trykkleddet som inneholder ∂_{x^*} balanserer det dominerende viskøse leddet i første ligning, og foreslå en verdi for P .

(b) Skriv opp det resulterende skalerte problemet. Det vil inneholde to dimensjonsløse parametre: ε og Reynoldstallet $Re = \varepsilon LU/\nu$.

(c) Dersom Reynoldstallet blir for stort (i størrelsesorden 1000 eller over) kan strømningen bli turbulent. Estimér Re for en situasjon med $\varepsilon L \approx 10 \mu\text{m}$, $U \approx 10 \text{ m/s}$. Typiske motoroljer har en viskositet som varierer i området fra 2 cSt til 150 cSt, avhengig av temperatur og oljekvalitet. (Enheten er centiStokes, hvor $1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$.) I fortsettelsen skal vi regne med at strømningen ikke blir turbulent, slik at vi kan fortsette å regne med de stasjonære ligningene.

(d) Til laveste orden (ved å sette $\varepsilon = 0$ i ligningene) skal du nå finne

$$(1) \quad \partial_x p = \partial_{yy} u, \quad \partial_y p = 0, \quad \partial_x u + \partial_y v = 0.$$

Vis at

$$(2) \quad u = -\frac{1}{2}(\partial_x p)y(h-y) + \frac{h-y}{h}.$$

(Hint: Integrer den første ligningen i (1) to ganger i y -retning.) Vis også at $\int_0^{h(x)} \partial_x u = 0$ ved å integrere den tredje ligningen i (1) i y -retningen, sett inn u fra (2) og få en ligning som kan integreres på ny. Resultatet skal bli *Reynolds ligning*:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 6 \frac{h - \bar{h}}{h^3}$$

hvor integrasjonskonstanten \bar{h} må bestemmes ut fra passende randbetingelser. Gjør dette, under antagelsene $p(0) = p(1) = 0$ og $h(x) = 1 - \alpha x$. Omtrent hvor stort blir smøringstrykket når $L \approx 20 \text{ mm}$?