75032 Matrisemetoder

Løsningsforslag til oppgaver gitt til onsdag 1/3–95

5.2.9 side 261: I det gitte tilfellet blir $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = aq + bs + cr + dt$. I det generelle tilfellet, der A er en $m \times n$-matrise og B er $n \times m$ blir

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}}_{(AB)_{ii}} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_{ji}}_{(BA)_{jj}} = \operatorname{tr}(BA).$$

Spesielt, om $m = n$ kan vi i det minste definere $AB - BA$, og $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0 \neq n = \operatorname{tr} I$ så $AB - BA = I$ er umulig.

5.3.9 side 273: Tilordner vi indeksene 1 til Los Angeles, 2 til Boston og 3 til Chicago, får vi matrisen

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

for prosessen. En likevektstilstand kan vi finne uten noe som helst regning! For problemet er uendret om vi bytter om LA og Boston, så likevektstilstanden burde ha like mange biler (la oss si b) i hver av de to byene. Hvis Chicago har c biler, flyttes hver måned $b/2 + b/2 = b$ biler til Chicago og c biler ut, så vi må ha $b = c$, og likevektstilstanden er $[b, b, b]^{\mathrm{T}}$ eller $[1/3, 1/3, 1/3]^{\mathrm{T}}$ om vi normaliserer så tallene ser ut som sannsynligheter (eller andeler).

Selvsagt kan man lett regne ut det karakteristiske polynomet. Siden vi har en Markov-matrise vet vi på forhånd at 1 blir en egenverdi, så vi kan dele tredjegradspolynomet med $\lambda - 1$ og enkelt faktorisere det resulterende annengradspolynomet, med sluttresultat

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4} = (\lambda - 1)\Big(\lambda + \frac{1}{2}\Big)\Big(\lambda - \frac{1}{2}\Big),$$

som viser at $\lambda = 1$ er en enkel egenverdi, og likevektstilstanden er entydig (opp til multiplikasjon med en konstant).

5.3.12 side 274: Dette gjennomgikk jeg faktisk på forelesning. Det mest elegante beviset består i å betrakte vektoren $e = [1, 1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}}$ (n enere), som har den hendige egenskap at $e^{\mathrm{T}}x = x_1 + \cdots + x_n$ for $x \in \mathbf{R}^n$. Markovegenskapen for matrisen A kan skrives $e^{\mathrm{T}}A = e^{\mathrm{T}}$, og dermed kan vi skrive summen av komponentene til Ax som $e^{\mathrm{T}}(Ax) = (e^{\mathrm{T}}A)x = e^{\mathrm{T}}x$. Dersom $Ax = \lambda x$ får vi dermed $\lambda e^{\mathrm{T}}x = e^{\mathrm{T}}Ax = e^{\mathrm{T}}x$ som viser at enten er $\lambda = 1$ eller $e^{\mathrm{T}}x = 0$.

5.3.16 side 274: Forutsatt at rekken konvergerer, får vi jo

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots) = (I - A) + (A - A^2) + (A^2 - A^3) + \cdots = I$$

siden hver potens av A umiddelbart kanselleres av neste ledd. For den gitte matrisen finner vi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

slik at den uendelige summen blir endelig i dette tilfellet, og

$$(I - A)^1 = I + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som ganske riktig stemmer.

5.4.8 side 287: De gitte ligningene kan skrives

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix}.$$

(a) Summen av egenverdiene er $\operatorname{tr}(A) = 5$, så minst en av de to egenverdiene er større enn 1 i absoluttverdi. Altså er systemet ustabilt.

(b) Nå blir vi visst nødt til å regne litt mer: Koeffisientmatrisen får egenverdiene 3 og 2 (summen er $\operatorname{tr}(A) = 5$ og produktet er $\det(A) = 6$), og siden

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

trenger vi knapt regne for å se at egenvektorene blir

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

slik at vi kan skrive $AS = S\Lambda$ der

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dette leder til

$$\begin{bmatrix} r \\ w \end{bmatrix} = Se^{t\Lambda}S^{-1}\begin{bmatrix} r_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix} = 100\begin{bmatrix} 2e^{3t} + e^{2t} \\ e^{3t} + e^{2t} \end{bmatrix}.$$

(c)

$$\frac{r}{w} = \frac{2e^{3t} + e^{2t}}{e^{3t} + e^{2t}} = \frac{2 + e^{-t}}{1 + e^{-t}} \to 2 \quad \text{når } t \to \infty.$$

5.4.13 side 288:

(a) $u_1' = cu_2 - bu_3$, $u_2' = -cu_1 + au_3$ og $u_3' = bu_1 - au_2$ og en triviell regning gir $u_1'u_1 + u_2'u_2 + u_3'u3 = 0$.

(b) $d(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)/dt = 2u_1'u_1 + 2u_2'u_2 + 2u_3'u3 = 0$ i følge resultatet fra (a).

(c) Det karakteristiske polynomet blir (utvikler determinanten etter første søyle):

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & c & -b \\ -c & -\lambda & a \\ b & -a & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} c & -b \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & -b \\ -\lambda & a \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 - a^2) + c(-c\lambda - ab) + b(ac - b\lambda) \\ &= -\lambda(\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

som gir egenverdiene 0 og $\pm i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.