SIF5005 MATEMATIKK 2 VÅR 2003

Løsningsforslag Hjemmeøving 3

Oppgave 1. Vi ser at f tilsvarer avstanden fra punktet (x, y, z) til origo kvadrert, mens g er 2 minus avstanden til origo. Dermed har f sine maksimumsverdier i hjørnene av kuben Q, det vil si i punktene $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, hvor verdien er 3. g vil oppnå sin maksimumsverdi, 2, i origo.

Oppgave 2. Vi vil bruke lineær tilnærming for å regne ut $f(0.9, 1, 0.9)$ når vi kjenner $f(1, 1, 1) = 3$, samt de deriverte til f i punktet $(1, 1, 1)$. Vi bruker da at

$$f(0.9, 1, 0.9) \approx f(1, 1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)\Delta z,$$

hvor $\Delta x = \Delta z = 0.9 - 1 = -0.1$, $\Delta y = 1 - 1 = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = 2$. Dette gir

$$f(0.9, 1, 0.9) \approx 3 + 2(-0.1) + 2 \cdot 0 + 2(-0.1) = 2.6.$$

Siden de andrederiverte alle er ikke-negative, vil vi forvente at denne tilnærmingsverdien er for lav. Den eksakte verdien er $f(0.9, 1, 0.9) = 0.9^2 + 1 + 0.9^2 = 2.62$.

Oppgave 3. La $\tilde{Q}$ beskrive den delen av boksen vi observerer fluen,

$$\tilde{Q} = \left\{(x, y, z) \ : \ -1 \le x \le 1, -1 \le y < -\tfrac{1}{2}, 0 < z \le 1\right\} \subset Q.$$

La $\mathbf{v}$ være hastigheten til fluen. Da er $\mathbf{v} = k\boldsymbol{\nabla} T = k\left[\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right]$ hvor $k > 0$ er en proporsjonalitetskonstant. La v_x, v_y og v_z betegne komponentene av $\mathbf{v}$. I $\tilde{Q}$ er da

$$v_z = 2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \qquad \text{(Vertikal fart dobbelt så stor som horisontal.)}$$

$$v_y < 0. \qquad \text{(Fluen flyr mot venstre.)}$$

Siden $v_x = k\frac{\partial T}{\partial x}$, $v_y = k\frac{\partial T}{\partial y}$ og $v_z = k\frac{\partial T}{\partial z}$ finner vi at

$$\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 - \left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 \quad \text{og} \quad \frac{\partial T}{\partial y} < 0,$$

slik at

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{2}T(x, y, z)\right)^2 - T(x, y, z)^2 = T(x, y, z)^2.$$

Altså er $\frac{\partial T}{\partial y} = \pm T(x, y, z)$ hvor fortegnet velges slik at $\frac{\partial T}{\partial y} < 0$. Vi kan skrive $\frac{\partial T}{\partial y} = -\left|T(x, y, z)\right|$.

Siden $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin \tilde{Q}$ kan vi ikke si så mye om fluens bevegelse i dette punktet. Farten til fluen i x- og z-retning vil fortsatt være bestemt av temperaturen, og ligningene

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y, z) = T(x, y, z), \qquad \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z) = 2\sqrt{2}T(x, y, z),$$

men vi kan ikke si noen ting om farten i y-retning.

Oppgave 4. I origo finner vi at $we^w = 0$, og siden $e^w > 0$ må $w = 0$. Ved å derivere hele uttrykket med hensyn på x ser vi at

$$\frac{\partial w}{\partial x}e^w + we^w\frac{\partial w}{\partial x} = 2x,$$

og tilsvarende

$$\frac{\partial w}{\partial y}e^w + we^w\frac{\partial w}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial w}{\partial z}e^w + we^w\frac{\partial w}{\partial z} = \tfrac{1}{2}z.$$

Siden $w = 0$ i origo blir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = \frac{\partial w}{\partial x}(0,0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0.$$

Oppgave 5. Vi er gitt flaten $S: \ f(x,y,z) = 6$ hvor

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}y^3 + x^2y + xy^2 - x - y.$$

De førstederiverte er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + 2xy + y^2 - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x^2 + 2xy - 1 \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

I kritiske punkter er $x^2 + 2xy + y^2 = 1$. Siden $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, betyr det at $x + y = \pm 1$.

La oss først undersøke om planet $x + y = 1$ har noen punkter til felles med S. Vi setter inn $x = 1 - y$ i $f(x,y,z)$. Et kritisk punkt på S må da ha

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}(1-y)^3 + \tfrac{1}{3}y^3 + (1-y)^2y + (1-y)y^2 - (1-y) - y &= 6 \\
\tfrac{1}{3}(1 - 3y + 3y^2 - y^3) + \tfrac{1}{3}y^3 + y - 2y^2 + y^3 + y^2 - y^3 - 1 + y - y &= 6 \\
(\tfrac{1}{3} - 1 - 6) + y(-1 + 1 + 1 - 1) + y^2(1 - 2 + 1) + y^3(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + 1 - 1) &= 0,
\end{aligned}$$

som gir $-\frac{20}{3} = 0$, altså ingen felles punkter.

For å undersøke om S har felles punkter med planet $x + y = -1$ går vi fram på samme måte. Ved å sette inn $x = -1 - y$ finner vi at $-\frac{16}{3} = 0$. Vi konkluderer dermed med at f har ingen kritiske punkter på flaten S.

S er en 3-dimensjonal nivåflate til f som er uavhengig av z. Det betyr at tangentplanet i punktet $(1,2,2)$ vil være det vertikale planet som går gjennom tangentlinjen i punktet $(1,2)$ til projiseringen av S i xy-planet. Ved å implisittderivere uttrykket $f(x,y,0) = 6$ med hensyn på x finner vi

$$x^2 + y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy + x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

I punktet $(1,2)$ får vi

$$1 + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4 + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

eller $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1$. Tangentlinjen i xy-planet er da gitt ved $(y-2) = -1(x-1)$ eller $y = 3 - x$. Dette vil også være ligningen for tangentplanet i rommet.

Oppgave 6. Vi finner først de kritiske punktene til $f(x,y) = -x^3 + x^2 + 3x - x^2y + \frac{1}{2}y^2$. De førstederiverte er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 2x + 3 - 2xy \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 + y.$$

For at $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ må $y = x^2$ og

$$-2x^3 - 3x^2 + 2x + 3 = 0.$$

Vi ser at $x = 1$ er en løsning av denne tredjegradsligningen, og ved å dele venstresiden på $(x-1)$ finner vi

$$-2x^3 - 3x^2 + 2x + 3 = -2(x + \tfrac{3}{2})(x+1)(x-1).$$

De kritiske punktene til f blir da $(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $(-1,1)$ og $(1,1)$.

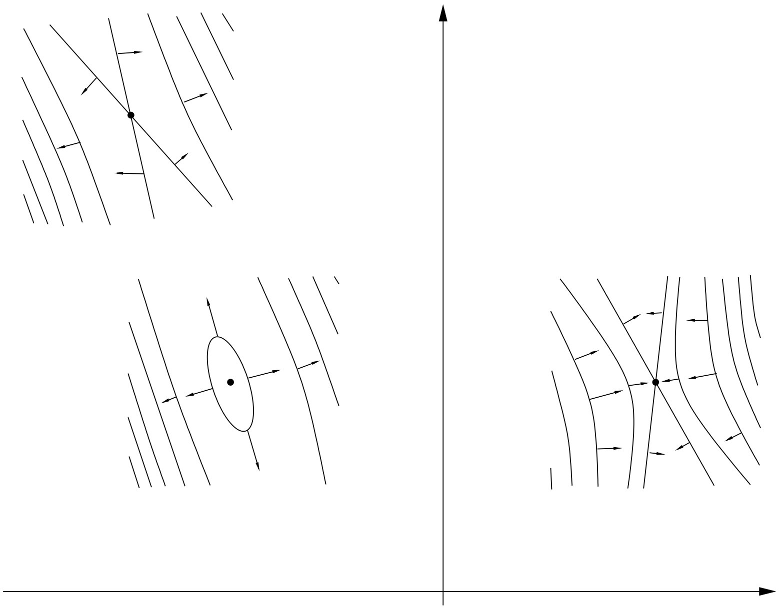
For å klassifisere punktene ser vi på de andrederiverte. Vi finner

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x + 2 - 2y, \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x, \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1.$$

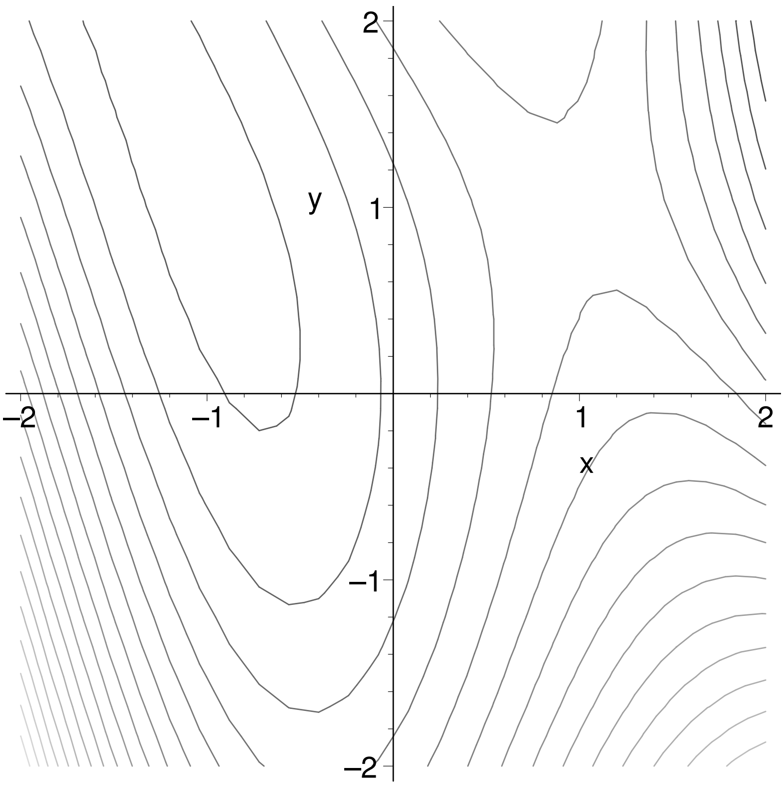
Annenderiverttesten (side 873 i E&P, side 503 i LHL) med $\Delta = AC - B^2$ gir da følgende resultater:

Kritisk punkt	A	B	C	Δ	Type punkt
$(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$	$\frac{13}{2}$	3	1	$-\frac{5}{2}$	Sadelpunkt
$(-1,1)$	6	2	1	2	Lokalt minimum
$(1,1)$	-6	-2	1	-10	Sadelpunkt

Figur 1 viser nivåkurvene rundt hvert punkt, mens figur 2 viser nivåkurvene i området $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$.



FIGUR 1. Nivåkurvene til f rundt hvert kritiske punkt



FIGUR 2. Nivåkurvene til f i området $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$