SIF5005 Matematikk 6, våren 2003

Hjemmeøving 6

Veiledning og innlevering: uke 15 (før påske).

Oppgave 1 Vis at vektorfeltet $e^x y\,\mathbf{i} + (e^x + y)\,\mathbf{j}$ er konservativt, og finn et potensial for vektorfeltet. Beregn

$$\int_C e^x y\,dx + (e^x + y)\,dy$$

der C er kvartsirkelen i første kvadrant av sirkelen med radius 3 og sentrum i origo, regnet i positiv omløpsretning.

Oppgave 2 Bruk Greens teorem til å beregne

$$\oint_C -y^3\,dx + x^3\,dy$$

der C er ett omløp i positiv retning av sirkelen med sentrum i origo og radius a.

Oppgave 3 Beregn

$$\iint_S z\,dS$$

hvor S er den delen av flaten gitt ved $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ som ligger innenfor sylinderen $x^2 + y^2 = 4$.

Oppgave 4 La S være den delen av flaten $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger mellom planene $z = 0$ og $z = 5$. Bruk Stokes' teorem til å beregne flateintegralet

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$$

der $\mathbf{n}$ er normalvektoren til S med positiv $\mathbf{k}$-komponent og

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\,\mathbf{i} - xz\,\mathbf{j} + (2z + 1)\mathbf{k}.$$

Hint: Randen til S består av *to* plane kurver. Pass nøye på å få rett omløpsretning på begge (tegn figur). Om du vil, kan du omforme hvert av de to kurveintegralene videre til et flateintegral over et plant område.

Oppgave 5 Forklar hvordan innføringen av polarkoordinater i planet kan lede til formelen

$$P\,dx + Q\,dy = (P\cos\theta + Q\sin\theta)\,dr + (-P\sin\theta + Q\cos\theta)\,r\,d\theta.$$

Bruk dette til å skrive om uttrykket for arealet til et område R,

$$A = \tfrac{1}{2} \oint_C -y\,dx + x\,dy$$

til polarkoordinater, der randkurven C er gitt i polarkoordinater ved $r = f(\theta)$ for $0 \le \theta \le 2\pi$. (Anta spesielt at origo ligger innenfor området R.) Sammenlign svaret med det du har lært om arealberegninger i polarkoordinater i Matematikk 1.

Regn også om integralet

$$I = \oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

til polarkoordinater på samme måte (du kan gjenbruke noen resultater fra regningen ovenfor). Verifiser at om du setter

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

så er

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Beregn integralet I når C er en sirkel med radius a og sentrum i origo, gjennomløpt i positiv omløpsretning. Hvilket teorem er svaret *tilsynelatende* i strid med, og hvorfor er det ingen *virkelig* motstrid?

Oppgave 6 Når u er en to ganger kontinuerlig deriverbar funksjon av to variable, skriver vi

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \operatorname{div} \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

La R være et område med randkurve C, og la $\mathbf{n}$ være utadrettet enhetsnormal på C. Vi innfører betegnelsen

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla u$$

for den retningsderiverte av u langs normalen i et punkt på C. Vis ved å betrakte vektorfeltet $u\nabla v - v\nabla u$ at

$$\iint_R (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\,dA = \oint_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds.$$

En funksjon kalles *harmonisk* i et område om $\nabla^2 u = 0$ i hele området. Bruk formelen over med $v = 1$ til å vise at

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 0$$

når u er harmonisk i R.

La heretter $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Verifiser at v er harmonisk for $(x, y) \ne (0, 0)$.

La nå $0 < a < b$, og anta at u er harmonisk i området $x^2 + y^2 \le b^2$. Bruk formelen ovenfor på området mellom de to sirklene med sentrum i origo og radius a og b til å vise at u har samme middelverdi på de to sirklene. (*Hint*: Hele venstresiden blir null, og v og $\partial v/\partial n$ er begge konstante på hver av de to sirklene.)