Stokes teorem i et nøtteskall

Harald Hanche-Olsen

3. april 2001

Sammendrag

Dette notatet er med hensikt kort og konsist, og hopper over en god del detaljer. Meningen er å gi en kjapp utledning av Stokes teorem, og målet er bare å gi hovedidéen i beviset.

Digresjon: En delvis integrasjon ved hjelp av Greens teorem

La D være et område i uv–planet med randkurve J. Greens teorem

$$\iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\Big)\, dA = \oint_J P\, du + Q\, dv$$

med

$$P = f\frac{\partial g}{\partial u}, \quad Q = f\frac{\partial g}{\partial v}$$

leder til

$$\iint_D \Big(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\Big) = \oint_J f\, dg \tag{1}$$

hvor høyresiden kan betraktes som en kort form for

$$\oint_J f\frac{\partial g}{\partial u}\, du + f\frac{\partial g}{\partial v}\, dv.$$

Bevis for Stokes teorem for en parametrisert flate

Vi antar S er parametrisert ved $\mathbf{r}(u,v)$ hvor (u,v) varierer over et område D i uv–planet. Vi finner

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iint\limits_D \operatorname{curl}\mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\Big(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\Big)\,dA \\
&= \iint\limits_D \Big(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}-\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial v}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\Big)\,dA \\
&= \oint\limits_J \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\
&= \oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}
\end{aligned}$$

Den første likheten er bare definisjonen av flateintegralet for et vektorfelt. Den andre likheten bruker en identitet som vises på neste side, den tredje likheten er vektorutgaven av (1).

Den siste likheten er litt dypere enn den ser ut, selv om den i hovedsak bare flytter integralet fra en kurve i uv–planet til en kurve i rommet. Integralet i den nest siste linjen skal egentlig tolkes som integralet

$$\oint\limits_J P\big((\mathbf{r}(u,v))\big)\,dx+\oint\limits_J Q\big((\mathbf{r}(u,v))\big)\,dy+\oint\limits_J R\big((\mathbf{r}(u,v))\big)\,dz$$

hvor jeg har skrevet $\mathbf{F}=\langle P,Q,R\rangle$ og $\mathbf{r}=\langle x,y,z\rangle$, og vi husker at alle disse er funksjoner av (u,v). Dersom J parametriseres ved funksjoner $u(t)$ og $v(t)$ så er C parametrisert ved $\mathbf{r}\big(u(t),v(t)\big)$, og den siste likheten over følger.

Det gjenstår å kontrollere sammenhengen mellom fortegnet på normalvektoren $\mathbf{n}$ og omløpsretningen på randkurvene C og J, men jeg skal ikke gjøre det her.

På neste side viser jeg identiteten som ble brukt i overgangen fra første til annen linje over.

Bevis for identiteten $(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}-\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial v}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}$:
På den ene side er

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right) &= \left\langle\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\rangle \\
&\quad\cdot\left\langle\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right\rangle \\
&= \underbrace{\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}_{A}-\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}_{B}-\underbrace{\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}}_{C}+\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}}_{D} \\
&\quad+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}_{E}-\underbrace{\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}_{F}-\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}_{G}+\underbrace{\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}}_{H} \\
&\quad+\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}}_{I}-\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}}_{J}-\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}_{K}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}_{L}
\end{aligned}
$$

og på den annen side er

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial u}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}-\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial v}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} &= \Big(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}}_{M}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}_{L'}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}}_{E'}\Big)\frac{\partial x}{\partial v} \\
&\quad+\Big(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}}_{I'}+\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}_{N}+\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}}_{D'}\Big)\frac{\partial y}{\partial v} \\
&\quad+\Big(\underbrace{\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}}_{H'}+\underbrace{\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}_{A'}+\underbrace{\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}}_{O}\Big)\frac{\partial z}{\partial v} \\
&\quad-\Big(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}}_{M}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}_{J'}+\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}}_{G'}\Big)\frac{\partial x}{\partial u} \\
&\quad-\Big(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}}_{K'}+\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}_{N}+\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}}_{B'}\Big)\frac{\partial y}{\partial u} \\
&\quad-\Big(\underbrace{\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}}_{F'}+\underbrace{\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}_{C'}+\underbrace{\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}}_{O}\Big)\frac{\partial z}{\partial u}
\end{aligned}
$$

Det er nå bare å sjekke at underuttrykkene A–L passer sammen med A'–L' (pass på faktoren utenfor parentesen for de sistnevnte), og at M–O kansellerer.