Likhet av blandede partiellderiverte

Harald Hanche-Olsen

Sammendrag. Dette notatet er laget i forbindelse med Matematikk 2 vårsemesteret 2001. Hensikten er å gi et bevis for likhet av blandede partiellderiverte, for spesielt interesserte.

Beviset for teoremet bygger på følgende lille hjelpesetning.

Lemma 1 *Anta at f er en funksjon av to variable, og har kontinuerlige partiellderiverte av første orden i et område R. Da gjelder*

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)\,ds = f(b,y) - f(a,y),$$
$$\int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt = f(x,d) - f(x,c),$$

forutsatt at de rette linjestykkene fra (a,y) til (b,y) og fra (x,c) til (x,d) er inneholdt i R.

Bevis: Dette er ikke noe annet enn fundamentalteoremet fra envariabelanalysen i ny språkdrakt. For eksempel, for å vise den andre formelen, definer funksjonen $h(t) = f(x,t)$ og merk at den andre formelen ikke er noe annet enn det kjente resultatet

$$\int_c^d h'(t)\,dt = h(d) - h(c).$$

∎

Teorem 2 *Anta at f er en funksjon av to variabler, og har kontinuerlige partiellderiverte av annen orden i en omegn om (x,y). Da gjelder likheten*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \tag{1}$$

i punktet (x,y).

Bevis: La $h > 0$ være så liten at kvadratet med motsatte hjørner (x,y) og $(x+h, y+h)$ ligger innenfor R. Ved hjelp av lemmaet kan vi uttrykke $f(x+h, y+h)$ på to måter:

$$f(x+h,y+h) = f(x,y) + \int_x^{x+h} \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)\,ds + \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}(x+h,t)\,dt,$$
$$f(x+h,y+h) = f(x,y) + \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt + \int_x^{x+h} \frac{\partial f}{\partial x}(s,y+h)\,ds.$$

Vi kan trekke disse to likhetene fra hverandre og ordne resultatet slik:

$$\int_x^{x+h} \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(s,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,y)\Big)\,ds = \int_y^{y+h} \Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\Big)\,dt.$$

Neste trinn er å bruke lemmaet igjen, denne gangen på de partiellderiverte av f, for å skrive hver av de to integrandene i ligningen ovenfor som et integral:

$$\int_x^{x+h} \Big(\int_y^{y+h} \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(s,t)\,dt\Big)\,ds = \int_y^{y+h} \Big(\int_x^{x+h} \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(s,t)\,ds\Big)\,dt. \tag{2}$$

Til slutt dividerer vi begge sider med h^2 og lar h gå mot null. På grunn av kontinuiteten av de annen ordens partiellderiverte konverger nå begge sider i (2), og vi får ligningen (1) i grensen.

For å se dette klarere, kan vi skrive venstresiden i (2) slik:

$$\begin{aligned}\int_x^{x+h}\Bigl(\int_y^{y+h}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(s,t)\,dt\Bigr)\,ds &= \int_x^{x+h}\Bigl(\int_y^{y+h}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)\,dt\Bigr)\,ds \\ &\quad + \int_x^{x+h}\biggl(\int_y^{y+h}\Bigl(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(s,t)-\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)\Bigr)\,dt\biggr)\,ds\end{aligned}$$

hvor det første dobbeltintgralet på høyresiden bare integrerer en konstant, så det integralet blir

$$\int_x^{x+h}\Bigl(\int_y^{y+h}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)\,dt\Bigr)\,ds = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)$$

mens det andre integralet blir lite:

$$\begin{aligned}&\left|\int_x^{x+h}\biggl(\int_y^{y+h}\Bigl(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(s,t)-\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)\Bigr)\,dt\biggr)\,ds\right| \\ &\qquad\le \int_x^{x+h}\biggl(\int_y^{y+h}\underbrace{\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(s,t)-\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)\right|}_{<\,\varepsilon}\,dt\biggr)\,ds < h^2\varepsilon\end{aligned}$$

dersom h er så liten at integranden blir mindre enn ε, som antydet. Det går å velge h slik på grunn av antagelsen om kontinuitet. Vi ser altså at venstresiden i (2) delt med h^2 er summen av venstresiden i (1) pluss et ledd som kan gjøres mindre enn ε ved å velge h liten nok, mens tilsvarende gjelder for høyresiden. ∎

Eksempel: Funksjonen

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

har partiellderiverte av annen orden i hele planet, men

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0.$$

Men de partiellderiverte er da heller ikke kontinuerlige i $(0,0)$, så dette motsier ikke teoremet.