Taylors formel

2002–10–14

Taylorpolynomet

Et polynom $P_n(x)$ av grad n slik at

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Det finnes kun ett polynom med disse egenskapene:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Taylors formel

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(x)}.$$

Merk at hvert ledd i summen, og restleddet, er mye mindre enn foregående ledd når $|x-a|$ er liten nok (unntatt når foregående ledd er null, selvsagt!)

Taylors formel, integralform

Her er en annen variant av Taylors formel:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{P_n(x)} + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt}_{R_n(x)} .$$

Den kan vises ved induksjon på n (krever delvis integrasjon), og standardformen følger ved en variant av middelverdisetningen for integrasjon.

Taylorrekker

Taylorrekka til f i a:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Maclaurinrekka til f er Taylorrekka for i 0:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k$$

Berømte Maclaurinrekker

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \qquad -1 < x \leq 1$$

Sidesprang: Et irrasjonalt tall

Vi kan enkelt vise at $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ er irrasjonalt.

For anta det ikke er tilfellet. Da er $n!e$ et heltall bare n er stor nok. Men

$$n!e = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\text{heltall}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}$$

så da er den siste summen og et heltall. Men for $k \geq n+1$ er

$$\frac{n!}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}},$$

Irrasjonalt tall (forts)

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} &\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

og denne summen kan altså umulig være noe heltall likevel.

Faktisk er e et transcendent tall: Det finnes ikke noe polynom med heltallige koeffisienter som har e som rot.