Konvergenstester

2002–10–14

Grunnleggende idéer

0. n-teleddstesten:

Hvis ikke $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, så divergerer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. Positive ledd: Rekker med bare positive ledd konvergerer, eller divergerer mot ∞.

2. Absolutt konvergens:

Absolutt konvergente rekker konvergerer.
Konvergenstester for rekker med positive ledd leder til tester for absolutt konvergens. //

Integraltest

3. Integraltesten:

Om $a_n = f(n)$ der $f(x) > 0$ og f er avtagende, er

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

Restleddsformelen: Under betingelsene over er

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \infty \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

//

Sammenligning

4. Sammenligningstesten:

Om $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle n gjelder

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Spesielt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty.$$

//

Grensesammenligning

5. Grensesammenligningstesten:

Om $a_n > 0$ og $b_n > 0$ for alle n og

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = R, \quad 0 < R < \infty$$

gjelder

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty.$$

//

Forholdstesten

6. Forholdstesten: Om $a_n > 0$ og

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

gjelder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ er } \begin{cases} \text{konvergent} & \text{om } \rho < 1, \\ \text{divergent} & \text{om } \rho > 1, \end{cases}$$

og testen gir ingen konklusjon om $\rho = 1$. //

Rottesten

7. Rottesten: Om $a_n > 0$ og

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

gjelder samme konklusjoner som for forholdstesten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ er } \begin{cases} \text{konvergent} & \text{om } \rho < 1, \\ \text{divergent} & \text{om } \rho > 1, \end{cases}$$

og testen gir ingen konklusjon om $\rho = 1$. //

Alternerende rekker

8. Alternerende rekketest: Dersom

- $a_n > 0$,
- følgen $\{a_n\}$ er avtagende, og
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

så er $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent. //

Restleddet i alternerende rekker

Så lenge betingelsene for alternerende rekketest holder, gjelder:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k + R_n$$

hvor R_n ligger mellom 0 og $(-1)^{n+1}a_{n+1}$.

Med andre ord: Restleddet har samme fortegn som neste ledd i rekka, og mindre absoluttverdi. //

Absolutt og betinget konvergens

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kalles *absolutt konvergent* om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Enhver absolutt konvergent rekke er konvergent.

En rekke kalles *betinget konvergent* om den er konvergent men ikke absolutt konvergent.

Summen av en absolutt konvergent rekke er uendret om vi omarrangerer leddene.
Men summen av en betinget konvergent rekke kan endre seg, og kan faktisk bli hva vi vil! //