Integraler og Riemannsummer

2002–09–16

Egenskaper ved integralet

- $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(a-b)$
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

Egenskaper (forts)

- Om $a < b$ og $f(x) \geq 0$ på $[a, b]$ er
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$
- Om $a < b$ og $f(x) \leq g(x)$ på $[a, b]$ er
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Endelig vil vi kreve av integralet at enhver kontinuerlig funksjone definert på et lukket intervall er integrerbar.

Fundamentalteoremet

Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$, må

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$$

for alle $x \in [a, b]$.

Konsekvens av dette:
Dersom F er en antiderivert til f, er

$$\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(b) - F(a)$$

Partisjoner og Riemannsummer

Partisjon P av $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Notasjon: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $|P| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

Riemannsum R assosiert med P:

$$R = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i$$

hvor $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ (punktvalg).

Integrerbarhet

Integrerbarhet for en funksjon f over et intervall $[a, b]$: f kalles integrerbar med integral I dersom: For enhver $\epsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at for enhver partisjon P av $[a, b]$ med $|P| < \delta$ og enhver Riemannsum R assosiert med P er

$$|R - I| < \epsilon.$$

Notasjon

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Riemannintegralet

Integralet vi nettopp har definert, kalles Riemannintegralet.

Det oppfyller aksiomene vi stilte opp, og derfor også fundamentalteoremet.