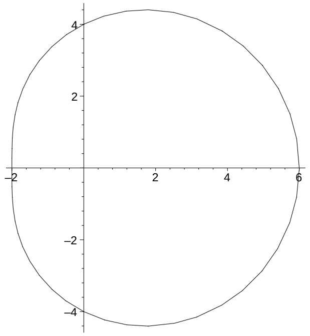
SIF5003 Matematikk 1 for F1 høsten 2002

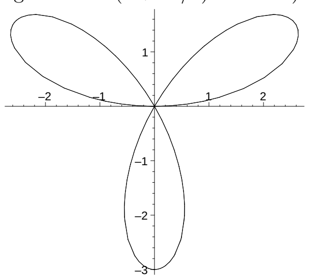
Løsningsforslag - Øving 12

Fra Edwards & Penney, avsnitt 10.2

$\boxed{44}$ $r = 4 + 2\cos\theta$ er symmetrisk om x-aksen ($\cos(-\theta) = \cos\theta$).



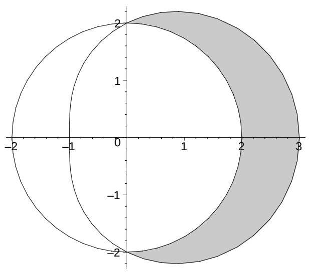
$\boxed{48}$ $r = 3\sin 3\theta$ er symmetrisk om y-aksen ($\sin 3(\pi - \theta) = \sin 3\theta$). (I tillegg har man en treveis rotasjonssymmetri som følger av $\sin 3(\theta + 2\pi/3) = \sin 3\theta$.)



Fra Edwards & Penney, avsnitt 10.3

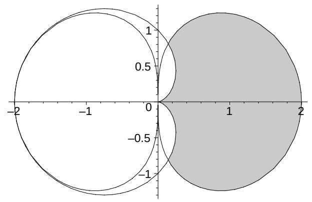
$\boxed{28}$ Området innenfor $r = 2 + \cos\theta$ og utenfor $r = 2$ begrenses av skjæringspunktene gitt ved $\cos\theta = 0$, dvs. $\theta = \pm\pi/2$. Ved symmetri blir arealet

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}((2+\cos\theta)^2 - 2^2)d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (4\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta \\
&= \left[4\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \pi/4 + 4.
\end{aligned}
$$



$\boxed{34}$ Vinkelen θ_0 til skjæringspunktet mellom kurvene i første kvadrant er bestemt av

$$
\begin{aligned}
(1-\cos\theta_0)^2 &= 4\cos\theta_0 \\
\cos^2\theta_0 - 6\cos\theta_0 + 1 &= 0 \\
\cos\theta_0 &= 3 - 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$



(I siste linje kaster vi bort den andre løsningen $\cos\theta_0 = 3 + 2\sqrt{2}$ fordi $\cos\theta_0 \le 1$.) Vi får altså

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^{\theta_0} \tfrac{1}{2}\big(4\cos\theta - (1-\cos\theta)^2\big)\,d\theta = \int_0^{\theta_0} (6\cos\theta - 1 - \cos^2\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\theta_0} (6\cos\theta - \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta)\,d\theta = 6\sin\theta_0 - \tfrac{3}{2}\theta_0 - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta_0.
\end{aligned}
$$

Om man vil, kan man også bruke $\sin\theta_0 = \sqrt{1-\cos\theta_0^2}$ og $\sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0\cos\theta_0 = 2\sqrt{1-\cos\theta_0^2}\cos\theta_0$ og til sist ende opp med

$$A = 12\sqrt{3\sqrt{2}-4} - \tfrac{3}{2}\arccos(3-2\sqrt{2}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(3\sqrt{2}-4)^{3/2} \quad (!)$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 10.4

$\boxed{18}$ Vi vil studere kurven

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t$$

i punktet $t = \frac{\pi}{4}$.

a) For å finne tangenten til kurven må vi først bestemme $\frac{dy}{dx}$. Vi bruker kjerneregelen som gir oss

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Dermed blir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t.$$

I punktet $t = \frac{\pi}{4}$ er da $\frac{dy}{dx} = -1$, mens

$$x(\tfrac{\pi}{4}) = \cos^3\tfrac{\pi}{4} = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^3 = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \quad \text{og} \quad y(\tfrac{\pi}{4}) = \sin^3\tfrac{\pi}{4} = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^3 = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Tangentlinjen er da gitt ved

$$y - \tfrac{1}{4}\sqrt{2} = -1(x - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -x + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

b) Vi vil bestemme krumningen ved å regne ut $\frac{d^2y}{dx^2}$. Ved å bruke kjerneregelen en gang til finner vi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{3\cos^2 t(-\sin t)} = \frac{1}{3\cos^4 t\sin t}$$

Evaluert i $t = \frac{\pi}{4}$ blir da

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3(\frac{1}{2}\sqrt{2})^4\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{8}{3\sqrt{2}}.$$

Siden dette er positivt, er kurven konkav opp (konveks) i dette punktet.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 10.5

28 Bruker formelen

$$A_y = 2\pi \int_0^{2\pi} x\,ds = 2\pi \int_0^{2\pi} (b + a\cos t)a\,dt = 4a\pi(b\pi) = 4ab\pi^2.$$

Her har vi brukt at $ds = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt = a\,dt$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 10.MP

54 Vi vil finne buelengden av den parametriske kurven

$$x = \ln(\cos t), \quad y = t, \qquad 0 \le t \le \tfrac{\pi}{4}.$$

Buelengden vil være gitt ved $s = \int \mathrm{d}s$ hvor

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) + 1^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{1 - u^2}\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

hvor vi i siste overgang brukte substitusjonen $u = \sin t$. Ved delbrøkoppspalting finner vi videre

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u} = \frac{A(1 + u) + B(1 - u)}{1 - u^2}.$$

Ved å sammenligne koeffisienter får vi da at $A + B = 1$, $A - B = 0$, eller tilsvarende $A = B = \frac{1}{2}$. Dermed blir

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{1 - u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{1 + u}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{2}\ln|1 - u| + \frac{1}{2}\ln|1 + u|\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\frac{1 + u}{1 - u}\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})}\frac{(2 + \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2} = \ln\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

52 Vi benytter formelen $V = \pi \int_c^d x^2\,dy$.

For å være sikker på at det er lov å bruke denne integralformelen, trenger vi å vite at den gitte kurven virkelig kan beskrives ved at x er en funksjon av y. Nedenfor gjør vi dette ved eksplisitt regning, men vi kunne også merket oss at $y = a\sin^{1/n}\theta \cdot \sin\theta = a\sin^{(1+n)/n}\theta$, som er en voksende funksjon av θ i området $0 \le \theta \le \pi/2$. Så vi kan omvende den funksjonen og uttrykke θ, og dermed x, ved y.

Fra ligningen $r = a(\sin\theta)^{1/n}$ får man

$$r^n = a^n \sin\theta = a^n \frac{y}{r},$$

og dermed

$$(x^2 + y^2)^{(n+1)/2} = a^n y, \quad x^2 = a^{2n/(n+1)} y^{2/(n+1)} - y^2.$$

Dette gir

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_0^a (a^{2n/(n+1)} y^{2/(n+1)} - y^2)\,dy \\ &= \pi\left[a^{2n/(n+1)} \frac{n + 1}{n + 3} y^{(n+3)/(n+1)} - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^a = \frac{2}{3}\pi a^3 \frac{n}{n + 3}. \end{aligned}$$

Vi finner $\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{2}{3}\pi a^3$. (Dette er volumet av en halvkule, som er rimelig fordi $\lim_{n\to\infty}(\sin\theta)^{1/n} = 1$ når $0 < \theta \le \pi/2$.)

Alternativt kan det virke fornuftig å bruke θ som integrasjonsvariabel: Vi finner

$$dy = \left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)d\theta = a\left(\frac{1}{n}\sin^{(1-n)/n}\theta\cos\theta + \sin^{1/n}\theta\cos\theta\right)d\theta$$

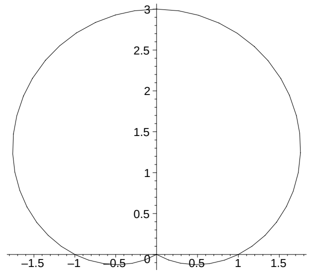
slik at

$$\pi\int_0^a x^2\,dy = \pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^{2/n}\theta\cos^2\theta\left(\frac{1}{n}\sin^{(1-n)/n}\theta\cos\theta + \sin^{1/n}\theta\cos\theta\right)d\theta$$

hvor man så setter inn $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, og trekker den felles faktoren $\cos\theta$ ut av parentesen, hvoretter $u = \sin\theta$ skulle være en effektiv substitusjon. Dette leder da også frem til målet, men ikke like raskt som løsningen ovenfor.

53

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} (1 + 2\sin\theta)^2\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} (1 + 4\sin\theta + 4\sin^2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \big(1 + 4\sin\theta + 2(1 - \cos 2\theta)\big)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\big[3\theta - 4\cos\theta - \sin 2\theta\big]_{-\pi/6}^{7\pi/6} \\ &= \tfrac{7}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\pi - 2\cos\tfrac{7}{6}\pi + 2\cos(-\tfrac{1}{6}\pi) - \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{7}{3}\pi + \sin(-\tfrac{1}{3}\pi) \\ &= 2\pi + 4\cos\tfrac{1}{6}\pi - \sin\tfrac{1}{3}\pi \\ &= 2\pi + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\pi + \tfrac{3}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$



$\boxed{54}$ Vi har $A = \int_a^b y\,dx$ der

$$x = t^3, \quad y = 4 - t^2, \qquad 0 \le t \le 2.$$

($a = x(0)$, $b = x(2)$.) Her blir $dx = 3t^2\,dt$, så

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (4 - t^2) \cdot 3t^2\,dt = \int_0^2 (12t^2 - 3t^4)\,dt \\ &= \Big[4t^3 - \frac{3}{5}t^5\Big]_0^2 = 32 - \frac{3}{5}32 = \frac{64}{5}. \end{aligned}$$

Buelengden er gitt ved

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 \sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}\,dt = \int_0^2 \sqrt{(3t^2)^2 + (-2t)^2}\,dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{9t^2 + 4}\,t\,dt \end{aligned}$$

hvor vi substituerer inn $u = 9t^2 + 4$, $du = 18t\,dt$:

$$s = \frac{1}{18}\int_4^{40} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{18}\Big[\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_4^{40} = \frac{1}{27}(40^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{8}{27}(10^{3/2} - 1) \approx 9{,}07.$$