

Fra Edwards & Penney, avsnitt 9.3

- 50 Vi bruker delvis integrasjon, og velger (ihht likning (3) s. 517 i E&P) $u = x^{n-1}$ og $dv = xe^{-x^2} dx$. Dette gir $du = (n-1)x^{n-2} dx$, og siden

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

velges $v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$. Nå gir likning (3) :

$$\begin{aligned} \int x^n e^{-x^2} dx &= x^{n-1} \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right) - \int \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right) [(n-1)x^{n-2}] dx \\ &= -\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2} + \frac{n-1}{2} \int x^{n-2} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

- 56 Av oppgave 9.3.50 vet vi at et integral på formen $\int x^n e^{-x^2} dx$ kan reduseres til $\int x^{n-2} e^{-x^2} dx$. Hvis n er et oddetall, og vi bruker formelen tilstrekkelig mange ganger vil denne typen integral reduseres til det kjente $\int xe^{-x^2} dx$. Vi følger denne strategien!

$$\begin{aligned} \int x^5 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2}x^4 e^{-x^2} + \frac{4}{2} \int x^3 e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2}x^4 e^{-x^2} + 2 \left(-\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \frac{2}{2} \int xe^{-x^2} dx \right) \\ &= -\frac{1}{2}x^4 e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} + 2 \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right) + C \\ &= -\frac{1}{2}x^4 e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

Vi får da følgende:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx &= \left[-\frac{1}{2}x^4 e^{-x^2} - x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} \right]_0^1 \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2}e^{-1} - e^{-1} - e^{-1} \right) - (-1) \right] \\ &= 1 - \frac{5}{2}e^{-1} \end{aligned}$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 9.4

- 12 Vi løser integralet ved (to ganger) å doble vinkelen. Dvs vi skriver om integranden ved å bruke likhetene $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ og $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. Vi får:

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 = \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - 2\cos 2x + \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right) \right] \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \right) dx \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C \end{aligned}$$

- 18 Vi bruker likheten $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi$ og får

$$\int \sin^3 \phi \cos^4 \phi d\phi = \int \sin \phi (1 - \cos^2 \phi) \cos^4 \phi d\phi$$

Substitusjonen $u = \cos \phi$ vil nå være hensiktsmessig. Av dette følger det at $du = -\sin \phi d\phi$, og vi har redusert problemet til følgende integral:

$$\int -(1 - u^2) u^4 du = \int (u^6 - u^4) du = \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + C$$

Nå gjenstår det bare å substituere tilbake - d.v.s.

$$\int \sin^3 \phi \cos^4 \phi d\phi = \frac{1}{7}\cos^7 \phi - \frac{1}{5}\cos^5 \phi + C$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 9.5

- 30 Vi merker oss først at

$$\frac{x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

Med andre ord er

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

Det første integralet kan antas kjent (men se Rottmann, formel 19) side 135, med $a = b = 1$):

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + C$$

Det andre integralet kan forenkles ved hjelp av Rottmann formel 5) side 133, med $A = b = 0$, $B = a = c = k = 1$:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x \right) + C$$

Kombinerer vi de to, ender vi med

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{3}{2} \arctan x + C$$

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

44 Vi vil bestemme grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^3}.$$

Hvis vi setter inn for $x = 0$ får vi et 0 over 0 uttrykk, slik at vi kan bruke L'Hopitals regel. Dette gir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{3x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{3}.$$

48 a) Vi vil regne ut integralet

$$\int \frac{2}{x(x^2 + 1)} dx.$$

Vi bruker først delbrøkkoppspalting for å skrive om brøken i integralet. Vi må bestemme A , B og C slik at

$$\frac{2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)}.$$

Dette gir $Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = 2$ slik at $A = 2$, $B = -2$ og $C = 0$. Følgelig er

$$\int \frac{2}{x(x^2 + 1)} dx = \int \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2 + 1} dx = 2 \ln x - \ln(x^2 + 1) + C = \ln \frac{x^2}{x^2 + 1} + C.$$

b) For å løse initialverdi problemet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x(x^2 + 1)}, \quad y(1) = 1,$$

observerer vi at ligningen er separabel. Dermed kan vi skrive

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x(x^2 + 1)} dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = \ln \frac{x^2}{x^2 + 1} + C.$$

For å bestemme C setter vi inn initialbetingelsen $y(1) = 1$,

$$0 = \ln \frac{1}{2} + C \quad \Leftrightarrow \quad C = \ln 2.$$

Tilslutt løser vi for y ved å anvende eksponentialfunksjonen,

$$y = e^{\ln \frac{x^2}{x^2 + 1} + \ln 2} = \frac{2x^2}{x^2 + 1}.$$

59 Vi vil beregne det bestemte integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^x + e^{-x}} dx.$$

Vi substituerer med $u = e^x$. Da er $du = e^x dx = u dx$, slik at

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^x + e^{-x}} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{u(1 + u + u^{-1})} du = \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + u + u^2} du.$$

For å løse dette integralet kan vi bruke formel 6b på side 133 i Rottmann, med $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ og $c = 1$. Vi kan også beregne dette selv ved å komplettere kvadratet,

$$u^2 + u + 1 = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Dette gir da

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + u + u^2} du &= \int_1^{\infty} \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2} du = \frac{4}{3} \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} du \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + v^2} dv = \frac{2}{\sqrt{3}} [\arctan v]_1^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

hvor vi underveis foretar substitusjonen $v = \frac{2}{\sqrt{3}}u + \frac{1}{\sqrt{3}}$.