Fra Edwards & Penney, avsnitt 11.7

18 Vi forsøker oss med forholdstesten med $a_n = \dfrac{(-1{,}01)^{n+1}}{n^4}$.

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1{,}01)^{n+2}}{(n+1)^4}}{\dfrac{(-1{,}01)^{n+1}}{n^4}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1{,}01)n^4}{(n+1)^4}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1{,}01)}{(1+\frac{1}{n})^4}\right| = 1{,}01.$$

Siden $\rho > 1$ gir forholdstesten oss at rekka divergerer.

28 Prøver forholdstesten med $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n!}{n^n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} < 1$$

så rekken konvergerer absolutt (i utledningen ovenfor har vi brukt at $(n+1)! = n!\cdot(n+1)$, og at $e = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$).

40 La $a_n = (-1)^{n+1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3k-2}$. Vi undersøker om rekka er absolutt konvergent ved hjelp av forholdskriteriet (teorem 4, s. 678):

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)-1}{3(n+1)-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

Siden $\rho < 1$, er rekka absolutt konvergent.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 8.2

44 Vi foretar en substitusjon $u = x^{3/2}$ som gir oss at $du = \frac{3}{2}x^{1/2}\,dx$. Følgelig blir integralet

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x^3} = \frac{2}{3}\int\frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3}\arctan u + C = \frac{2}{3}\arctan(x^{3/2}) + C.$$

68 Vi bruker sylinderskallmetoden, og deler rotasjonslegemet inn i skall som hver har radius x, tykkelse dx og høyde y. Volumet blir dermed

$$V = \int_0^1 2\pi xy\,dx = \int_0^1 2\pi\frac{x}{1+x^4}\,dx.$$

Så substituerer vi $u = x^2$, og får $du = 2x\,dx$, $x = 0$ gir $u = 0$, $x = 1$ gir $u = 1$, slik at

$$V = \int_0^1 \pi\frac{1}{1+u^2}\,du = \Big|_0^1 \pi\arctan u = \pi(\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 8.4

24 Vi ser at uttrykket er av formen 1^∞. Følgelig tar vi logaritmen av uttrykket og regner på denne istedet:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big).$$

Dette er et $0\cdot\infty$-uttrykk, slik at vi omformer det til $\frac{0}{0}$ før vi benytter L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big). = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-1/x^2}\cdot\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^5\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)} = 0.$$

Følgelig vil

$$\lim_{x\to\infty}\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)^x = e^0 = 1.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 8.5

54 Vi deler legemet inn i skiver normalt på x-aksen, slik at hver skive har radius y og tykkelse dx. Volumet blir da

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \pi y^2\,dx = \int_0^\pi \pi(\sinh x)^2\,dx = \int_0^\pi \pi(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2\,dx \\ &= \int_0^\pi \pi\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cosh 2x - 1\,dx = \frac{\pi}{2}\Big|_0^\pi \frac{\sinh 2x}{2} - x \\ &= \frac{\pi}{2}\Big(\frac{\sinh 2\pi}{2}-\pi\Big). \end{aligned}$$

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

3 (i): "$\infty-\infty$" form gjøres om på formen "$\frac{0}{0}$" ved å skrive som én brøk. Bruk L'Hôpitals regel to ganger:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \frac{1}{2}$$

(ii): Bestemmer først k. Nevner går mot null, slik teller må gå mot null også for at grensen skal eksistere. Da må $2-\sqrt{1+k}=0$, eller $k=3$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-\sqrt{1+3x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{2-\frac{3}{2\sqrt{1+3x}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$$

51 Vi har at $dy/dx=\sqrt{x}$. Følgelig vil buelengden være gitt ved

$$\begin{aligned} B &= \int ds = \int_0^1 \sqrt{1+\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\Big|_1^2 u^{3/2} = \frac{2}{3}(2^{3/2}-1) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Videre finner vi overflatearealet ved å integrere opp ringer som hver har radius x og overflateareal $2\pi x\,ds$, og så foreta substitusjonen $u = x + 1$:

$$
\begin{aligned}
A &= \int 2\pi r\,ds = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx = 2\pi \int_1^2 (u-1)\sqrt{u}\,du \\
&= 2\pi \int_1^2 u^{3/2} - u1/2\,du = 2\pi \Big|_1^2 \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} = 4\pi \Big|_1^2 \frac{1}{5}u^{5/2} - \frac{1}{3}u^{3/2} \\
&= 4\pi \left(\frac{1}{5}4\sqrt{2} - \frac{1}{3}2\sqrt{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{8\pi}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)
\end{aligned}
$$