NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5003 Matematikk 1
for F1 høsten 2002

Løsningsforslag - Øving 9

Fra Edwards & Penney, avsnitt 11.4

2 Gitt funksjonen $f(x) = \sin x$ og $n = 4$ har vi:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0\\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0\\
f^{(5)}(x) &= \cos x
\end{aligned}$$

Altså er Taylorpolynomet og restleddet gitt som

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \qquad R_4(x) = \frac{x^5}{5!}\cos z$$

for en z mellom 0 og x.

56 Anta at $0 < x \le 1$. Vi har gitt følgende identitet:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$$

Denne kan lett kontrolleres ved å multiplisere begge sider med $1+t$. Vi integrer opp begge sider fra $t = 0$ til $t = x$ og får:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t}dt &= \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t})dt;\\
[\ln(1+t)]_0^x &= \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x + R_n
\end{aligned}$$

Der

$$R_n = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}dt$$

Vi har at

$$|R_n| \le \int_0^x t^{n+1}dt = \frac{x^{n+2}}{n+2}$$

Siden $x \le 1$ vil altså $R_n \to 0$ når $n \to \infty$ Derfor kan vi ved å sette inn grensene i integralet konkludere med:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

dersom $0 < x \le 1$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 11.5

24 Vi har rekka

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$$

og vil teste om ho konvergerar. Alle ledd er positive, og funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$$

gjev oss ledda i rekka for $x \in \mathbb{N}$ og er ein minkande funksjon. Då kan vi nytte integraltesten. Vi integrerar ved substitusjon:

$$u = \ln x \text{ og } \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Dette gjev

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u^3}du = \left[-\frac{1}{2}u^{-2}\right]_{\ln 2}^{\infty} = 0 + \frac{1}{2}(\ln 2)^{-2} < \infty$$

slik at rekka konvergerer.

42 Vi krever at $R_n < 2 \cdot 10^{-11}$. Dette holder når

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3}dx < 2 \cdot 10^{-11}$$

fordi R_n ifølge Teorem 2 ikke kan overstige dette integralet. Derfor krever vi at

$$\left[-\frac{1}{5x^5}\right]_n^{\infty} < 2 \cdot 10^{-11}$$

Ved innsetting følger det at $n^5 > 10^{10}$ og dermed at $n > 100$. Det vil si at det minste heltall n som garanterer at $R_n < E$ er 101.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 11.6

8 Det er kjent at p-rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(p = 2)$ konvergerer. Dessuten er

$$\frac{n^2 - n}{n^4 + 2} \le \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$

for $n \ge 1$. Ved sammenligningskriteriet for positive rekker er dermed rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n}{n^4 + 2}$$

også konvergent.

50 Ligning (7) i kapittel 5.3 gir oss at for hvert positivt heltall er

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ved å bruke dette resultatet får vi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

Denne rekka er dominert av p-rekka med $p = 2$:

$$\frac{2}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

Ved sammenligningskriteriet for positive rekker er dermed rekka i oppgaven konvergent.

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

59 **a)** Vi skriver

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

og skal altså vise

$$\frac{1}{2n} \leq a_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

For $n = 1$ er denne ulikheten $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} < 1/\sqrt{2}$, som åpenbart er riktig.
Vi antar så induksjonshypotesen $1/(2k) \leq a_k < 1/\sqrt{k+1}$ for en gitt k. Ved multiplikasjon med $(2k+1)/(2k+2)$ får vi ulikheten

$$\frac{2k+1}{(2k)(2k+2)} \leq a_{k+1} < \frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{k+1}}.$$

Vi *trenger å vise*

$$\frac{1}{2k+2} \leq a_{k+1} < \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

I følge det vi *har vist* er det nok å vise de to ulikhetene

$$\frac{1}{2k+2} \leq \frac{2k+1}{(2k)(2k+2)} \quad \text{og} \quad \frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

Den første er triviell, men den andre krever arbeid. Siden alle ledd er positive får vi en ekvivalent ulikhet ved å kvadrere begge sider og så multiplisere med fellesnevneren, som gir

$$(2k+1)^2(k+2) \leq (2k+2)^2(k+1).$$

Vi multipliserer ut og får

$$4k^3 + 12k^2 + 9k + 2 \leq 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4$$

som er riktig nok, og dermed er induksjonstrinnet fullført.

b) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ er ikke konvergent fordi $a_n \geq 1/(2n)$, og sammenligning med ($\frac{1}{2}$ ganger) den harmoniske rekken viser at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer.
Men rekken er konvergent ved testen for alternerende rekker, siden den virkelig er alternerende, leddene avtar (siden $a_{n+1}/a_n = (2n+1)/(2n+2) < 1$) og de går mot null (siden $0 < a_n < 1/\sqrt{n+1}$).
Altså er rekken betinget konvergent.

62 Vi finner Maclaurinrekken for e^{-x^2} ved å bytte ut x med $-x^2$ i rekken for e^{-x}:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}.$$

Generelt finner vi Maclaurinrekken for $f(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ ved å integrere leddvis, så Maclaurinrekken for f blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Det generelle utsagnet over kan vi vise slik: At Maclaurinrekken for g er $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ betyr at $b_n = g^{(n)}(0)/n!$. Vi søker Maclaurinrekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ der $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. Da blir $a_0 = f(0) = 0$, mens for $n \geq 1$ blir

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n-1)}(0)}{n!} = \frac{(n-1)!b_{n-1}}{n!} = \frac{b_{n-1}}{n}$$

slik at Maclaurinrekken for f blir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x b_n t^n\,dt$$

som påstått.

Med $x = 1$ i Taylorrekken finner vi

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

som er en alternerende rekke der absoluttverdien av n-te ledd avtar med n og går mot 0 når $n \to \infty$. Dermed har feilen samme fortegn som, og ikke større absoluttverdi enn, neste ledd i rekken. Vi trenger altså å bestemme n slik at

$$\frac{1}{n!(2n+1)} < 0{,}0005, \quad \text{det vil si } n!(2n+1) \geq 2000.$$

Vi stiller opp en liten tabell:

n	2	3	4	5	6
$n!$	2	6	24	120	720
$n!(2n+1)$	10	42	216	1320	9360

Leddet med $n = 6$ er altså tilstrekkelig lite, så vi kan nøye oss med å summere fra $n = 0$ til $n = 5$. I alt 6 ledd.

74 **(i)** Vi skal undersøke rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \tag{i}$$

som er en alternerende rekke med $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Vi undersøker først om den er absolutt konvergent. For alle $n \geq 1$ er $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, og siden den harmoniske rekken divergerer sier sammenligningstesten oss at rekken (i) ikke er absolutt konvergent.

For å undersøke betinget konvergens benytter vi oss av alternerende rekke testen. Siden $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$ for alle $n \geq 1$ er

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1} > 0.$$

Videre er

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

slik at kriteriene i testen er oppfylt. Følgelig er rekken betinget konvergent.

(ii) Vi skal undersøke rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(e^n + e^{-n})}, \tag{ii}$$

som er en alternerende rekke med $a_n = (\ln(e^n + e^{-n}))^{-1}$. Vi ser at ettersom n vokser seg stor går leddet e^{-n} mot null, slik at

$$a_n = \frac{1}{\ln(e^n + e^{-n})} \approx \frac{1}{\ln e^n} = \frac{1}{n}.$$

Vi bruker derfor grensesammenligningstesten med $b_n = \frac{1}{n}$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln(e^n+e^{-n})}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(e^n + e^{-n})} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}} = 1.$$

Siden grensen L eksisterer og er endelig, og den harmoniske rekken $\sum b_n$ divergerer, er ikke rekken (ii) absolutt konvergent.

Som over oppfyller a_n kriteriene i alternerende rekke testen slik at rekken er betinget konvergent.

(iii) Tilslutt skal vi undersøke rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}. \tag{iii}$$

Vi undersøker først absolutt konvergens, og finner

$$\left|\frac{\sin n}{n^2+1}\right| \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{for alle } n \geq 1.$$

Siden rekken $\sum \frac{1}{n^2}$ er konvergent, gir sammenligningstesten oss at rekken (iii) er absolutt konvergent.

26 Sammenhengen mellom legemets høyde h og fart v er gitt ved differensialligningen

$$v\frac{dv}{dh} = -\left(\frac{b}{1+h}\right)^2$$

a) Vi skal løse differensialligningen med initialbetingelse $v(1) = 0$. Vi skriver om ligningen til

$$vdv = -\left(\frac{b}{1+h}\right)^2 dh$$

SIF5003 Matematikk 1 for F1 høsten 2002

og integrer begge sider for å oppnå

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{b^2}{1+h} + C$$

Ved å sette inn $h = 1$ og bruke initialbetingelen finner vi at konstanten $C = -b^2/2$. Innsetting av dette gir

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{b^2}{1+h} - \frac{b^2}{2} = b^2\left(\frac{2-1-h}{2(1+h)}\right) = \frac{b^2}{2}\cdot\frac{1-h}{1+h} = \frac{b^2}{2}\cdot\frac{1-h^2}{(1+h)^2}$$

Vi tar kvadratrot på begge sider og kommer endelig frem til

$$v = b\frac{\sqrt{1-h^2}}{(1+h)}$$

Farten i det legemet treffer jordoverflaten er gitt ved $v(0) = b$.

b) Vi skal nå finne falltiden T. Vi vet at fart er den tidsderiverte av avstand, og i dette problemet betyr det at vi har sammenhengen

$$\frac{dh}{dt} = -v$$

Ved å sette inn dette for v i resultatet fra oppgave a) finner vi differensialligningen

$$-\frac{dh}{dt} = b\frac{\sqrt{1-h^2}}{1+h}$$

Videre manipulering og integrasjon gir

$$\int \frac{1+h}{\sqrt{1-h^2}}dh = \int -bdt$$

Vi splitter opp integralet på venstre side. Første del er lik (se Rottmann)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}dh = \arcsin h + C$$

Andre del finner vi ved hjelp av substitusjon

$$\int \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}dh = \sqrt{1-h^2} + C$$

Totalt får vi altså sammenhengen

$$\arcsin h - \sqrt{1-h^2} = -bt + C$$

Konstanten C finnes fra initialbetingelsen $t = 0$ når $h = 1$ (tiden er null i tidspunktet legemet slippes fra høyde 1).

$$C = \arcsin 1 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Altså, sammenhengen mellom t og h er gitt ved

$$t = \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{1-h^2} - \arcsin h\right)$$

Falltiden T finner vi ved å sette $h = 0$. Den blir lik $T = \frac{1}{b}(\frac{\pi}{2} + 1)$ som vi skulle vise.