SIF5003 Matematikk 1
for F1 høsten 2002

Løsningsforslag - Øving 7

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.5

20 Standardteknikken for separable differensialligninger gir

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int 2x(2x^2+1)\,dx$$

som integreres til

$$-\frac{1}{2y^2} = x^4 + x^2 + C$$

Vi setter inn for initialbetingelsen $x = 1$ og $y = 1$ og får $C = -5/2$, og dermed

$$2y^2 = \frac{1}{\frac{5}{2} - x^4 - x^2}.$$

På grunn av initialbetingelsen må vi velge den positive kvadratroten når vi løser for y, og ender derfor med

$$y = \frac{1}{\sqrt{5 - 2x^4 - 2x^2}}.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 7.2

46 Vi substituerer

$$u = \ln x^3, \quad du = \frac{1}{x^3}\cdot 3x^2\,dx = 3\cdot\frac{dx}{x}$$

og får:

$$\int \frac{\ln(x^3)}{x}\,dx = \int \frac{u}{3}\,du = \frac{1}{6}u^2 + C = \frac{1}{6}(\ln(x^3))^2 + C.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 7.3

68 Området R er begrenset av grafen til $y = e^{-x^2}$, koordinataksene og linjen $x = 1$. Vi skal finne volumet generert ved å rotere R om y-aksen.

Vi bruker sylinderskallmetoden. Vi tenker oss at legemet er sammensatt av tynne skall med radius x, høyde $y = e^{-x^2}$ og tykkelse dx. Volumet av et skall er $dV = 2\pi x e^{-x^2}\,dx$, og volumet av hele rotasjonslegemet er

$$V = \int_*^{**} dV = 2\pi\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = -\pi\int_0^{-1} e^u\,du = -\pi\left[e^u\right]_0^{-1} = \pi(1 - e^{-1}),$$

der vi brukte substitusjonen $u = -x^2$, $du = -2x\,dx$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 7.5

16 En mugge melk med starttemperatur $T_0 = 25°\text{C}$ avkjøles i omgivelser med temperatur $A = 0°\text{C}$. Ved Newtons avkjølingslov oppfyller temperaturen $T(t)$ i melken diff.ligningen

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$$

der k er en proporsjonalitetskonstant. Siden $A = 0$, er dette den velkjente ligningen for eksponensiell vekst (eller reduksjon) med løsning $T(t) = T_0 e^{-kt}$. For illustrasjonens skyld løser vi den for en generell A. Separasjon og integrasjon gir

$$\begin{aligned}\frac{dT}{T-A} &= -k\,dt,\\ \ln|T-A| &= -kt + C,\\ |T-A| &= e^{-kt}\cdot e^C,\\ T - A &= \pm e^C\cdot e^{-kt} = C_1 e^{-kt},\end{aligned}$$

der vi legger merke til at e^C er et vilkårlig *positivt* tall, mens $C_1 = \pm e^C$ kan være både positiv og negativ i den generelle løsningen (faktisk også 0, en løsning vi ekskluderte da vi dividerte med $T - A$). Initialbetingelsen $T(0) = T_0$ gir $C_1 = T_0 - A$, som gir løsningen

$$T(t) = A + (T_0 - A)e^{-kt}.$$

Med $A = 0$ får vi $T(t) = T_0 e^{-kt}$ (som vi allerede visste).

Det er oppgitt at etter $t = 20$ minutter er $T = 15°\text{C}$. Innsatt får vi $e^{-20k} = 15/25$, som gir $k = -\frac{1}{20}\ln\frac{3}{5} \approx 0{,}0255$ (enhet: min^{-1}). La $\hat{t}$ være tiden da temperaturen er falt til $5°\text{C}$. Innsatt gir dette $e^{-k\hat{t}} = 5/25$, dvs.

$$\hat{t} = -\tfrac{1}{k}\ln\tfrac{1}{5} = 20\frac{\ln\frac{1}{5}}{\ln\frac{3}{5}} = 20\frac{\ln 5}{\ln\frac{5}{3}} \approx 63{,}01.$$

Det tar altså ca. 63 minutter til temperaturen har falt til $5°\text{C}$.

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

23 La $v(t)$ betegne plattformens hastighet ved tidspunkt t, der $v(t)$ er målt i km/time og t er målt i timer med $t = 0$ idet slepewiren ryker.

VET: $\dfrac{dv}{dt} = -kv^2, \quad v(0) = 10, \quad v(\tfrac{1}{12}) = 8$

$$\begin{aligned}\int\frac{dv}{v^2} &= -k\int dt\\ -\frac{1}{v} &= -kt + C\\ v(t) &= \frac{1}{kt - C}\end{aligned}$$

$$v(0) = -\frac{1}{C} = 10 \quad\Rightarrow\quad C = -\frac{1}{10} \text{ og } v(t) = \frac{1}{kt + 0.1}$$

$$v(\tfrac{1}{12}) = \frac{1}{\frac{k}{12} + 0.1} = 8 \quad\Rightarrow\quad k = \frac{3}{10} \text{ og } v(t) = \frac{1}{0.3t + 0.1}$$

Vi har derfor at $v(t) = 8$ når

$$\frac{1}{0.3t + 0.1} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{19}{3}\text{timer} \approx 6.33\text{timer}$$

Tilbakelagt strekning:

$$\int_0^{19/3} v(t)dt = \int_0^{19/3} \frac{dt}{0.3t + 0.1} = \frac{10}{3}\Big[\ln(3t+1)\Big]_0^{19/3} = \frac{10}{3}\ln 20\text{km} \approx 9.99\text{km}$$

$\boxed{31}$ a) Standardmetoden for løsning av separable ligniner gir

$$\int \sqrt{y+1}\,dy = \int dx$$

og dermed generell løsning

$$\tfrac{2}{3}(y+1)^{3/2} = x + C$$

Vi setter inn fra initialbetingelsen $x = 0$ og $y = 0$ og får $C = \frac{2}{3}$. Deretter løser vi med hensyn på y og finner

$$y = (\tfrac{3}{2}x + 1)^{2/3} - 1.$$

b) Vi tar hintet:

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

hvor vi setter inn $dx/dy = \sqrt{y+1}$ rett fra differensialligningen for y, og får dermed

$$L = \int_0^2 \sqrt{y+2}\,dy = \left[\frac{2}{3}(y+2)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 2^{3/2}) = \frac{2}{3}(8 - 2\sqrt{2}).$$

Ekstraoppgave

$\boxed{1}$ Tverrsnittet av tanken i høyde y over bakken er en sirkel med radius

$$\sqrt{r^2 - (y-r)^2} = \sqrt{2ry - y^2},$$

og derfor med areal $A(y) = \pi(2ry - y^2)$. Arbeidet som skal til for å løfte ei skive med tykkelse Δy vil være

$$\Delta W(y_i) = \rho g y_i A(y_i)\Delta y.$$

Vi konstruerer integralet for arbeidet ved å dele opp kula i slike små bidrag, og la Δy gå mot 0. Integrasjonsgrensene får vi ved å observere at vi skal summere bidrag for $y_i \in [0, 2r]$. Altså

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \rho g y_i A(y_i)\Delta y \\ &= \int_0^{2r} \rho g y \pi(2ry - y^2)dy = \frac{4}{3}\pi\rho g r^4. \end{aligned}$$