

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.5

20 Standardteknikken for separable differensialligninger gir

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int 2x(2x^2 + 1) dx$$

som integreres til

$$-\frac{1}{2y^2} = x^4 + x^2 + C$$

Vi setter inn for initialbetingelsen $x = 1$ og $y = 1$ og får $C = -5/2$, og dermed

$$2y^2 = \frac{1}{\frac{5}{2} - x^4 - x^2}.$$

På grunn av initialbetingelsen må vi velge den positive kvadratroten når vi løser for y , og ender derfor med

$$y = \frac{1}{\sqrt{5 - 2x^4 - 2x^2}}.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 7.2

46 Vi substituerer

$$u = \ln x^3, \quad du = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 dx = 3 \cdot \frac{dx}{x}$$

og får:

$$\int \frac{\ln(x^3)}{x} dx = \int \frac{u}{3} du = \frac{1}{6}u^2 + C = \frac{1}{6}(\ln(x^3))^2 + C.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 7.3

68 Området R er begrenset av grafen til $y = e^{-x^2}$, koordinataksene og linjen $x = 1$. Vi skal finne volumet generert ved å rotere R om y -aksen.

Vi bruker sylinderskallmetoden. Vi tenker oss at legemet er sammensatt av tynne skall med radius x , høyde $y = e^{-x^2}$ og tykkelse dx . Volumet av et skall er $dV = 2\pi x e^{-x^2} dx$, og volumet av hele rotasjonslegemet er

$$V = \int_*^{**} dV = 2\pi \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\pi \int_0^{-1} e^u du = -\pi [e^u]_0^{-1} = \pi(1 - e^{-1}),$$

der vi brukte substitusjonen $u = -x^2$, $du = -2x dx$.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 7.5

- 16** En mugge melk med starttemperatur $T_0 = 25^\circ\text{C}$ avkjøles i omgivelser med temperatur $A = 0^\circ\text{C}$. Ved Newtons avkjølingslov oppfyller temperaturen $T(t)$ i melken diff.ligningen

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$$

der k er en proporsjonalitetskonstant. Siden $A = 0$, er dette den velkjente ligningen for eksponensiell vekst (eller reduksjon) med løsning $T(t) = T_0 e^{-kt}$. For illustrasjonens skyld løser vi den for en generell A . Separasjon og integrasjon gir

$$\begin{aligned}\frac{dT}{T - A} &= -k dt, \\ \ln|T - A| &= -kt + C, \\ |T - A| &= e^{-kt} \cdot e^C, \\ T - A &= \pm e^C \cdot e^{-kt} = C_1 e^{-kt},\end{aligned}$$

der vi legger merke til at e^C er et vilkårlig *positivt* tall, mens $C_1 = \pm e^C$ kan være både positiv og negativ i den generelle løsningen (faktisk også 0, en løsning vi ekskluderte da vi dividerte med $T - A$). Initialbetingelsen $T(0) = T_0$ gir $C_1 = T_0 - A$, som gir løsningen

$$T(t) = A + (T_0 - A)e^{-kt}.$$

Med $A = 0$ får vi $T(t) = T_0 e^{-kt}$ (som vi allerede visste).

Det er oppgitt at etter $t = 20$ minutter er $T = 15^\circ\text{C}$. Innsatt får vi $e^{-20k} = 15/25$, som gir $k = -\frac{1}{20} \ln \frac{3}{5} \approx 0,0255$ (enhet: min^{-1}). La \hat{t} være tiden da temperaturen er falt til 5°C . Innsatt gir dette $e^{-k\hat{t}} = 5/25$, dvs.

$$\hat{t} = -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{5} = 20 \frac{\ln \frac{1}{5}}{\ln \frac{3}{5}} = 20 \frac{\ln 5}{\ln \frac{3}{5}} \approx 63,01.$$

Det tar altså ca. 63 minutter til temperaturen har falt til 5°C .

Oppgaver fra eksamensoppgavesamlingen

- 23** La $v(t)$ betegne plattformens hastighet ved tidspunkt t , der $v(t)$ er målt i km/time og t er målt i timer med $t = 0$ idet slepewiren ryker.

$$\text{VET: } \frac{dv}{dt} = -kv^2, \quad v(0) = 10, \quad v\left(\frac{1}{12}\right) = 8$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dv}{v^2} &= -k \int dt \\ -\frac{1}{v} &= -kt + C \\ v(t) &= \frac{1}{kt - C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(0) = -\frac{1}{C} = 10 &\Rightarrow C = -\frac{1}{10} \text{ og } v(t) = \frac{1}{kt + 0.1} \\ v\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{\frac{k}{12} + 0.1} = 8 &\Rightarrow k = \frac{3}{10} \text{ og } v(t) = \frac{1}{0.3t + 0.1}\end{aligned}$$

Vi har derfor at $v(t) = 8$ når

$$\frac{1}{0.3t + 0.1} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{19}{3} \text{ timer} \approx 6.33 \text{ timer}$$

Tilbakelagt strekning:

$$\int_0^{19/3} v(t) dt = \int_0^{19/3} \frac{dt}{0.3t + 0.1} = \frac{10}{3} \left[\ln(3t + 1) \right]_0^{19/3} = \frac{10}{3} \ln 20 \text{ km} \approx 9.99 \text{ km}$$

31 a) Standardmetoden for løsning av separable ligninger gir

$$\int \sqrt{y+1} dy = \int dx$$

og dermed generell løsning

$$\frac{2}{3}(y+1)^{3/2} = x + C$$

Vi setter inn fra initialbetingelsen $x = 0$ og $y = 0$ og får $C = \frac{2}{3}$. Deretter løser vi med hensyn på y og finner

$$y = \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^{2/3} - 1.$$

b) Vi tar hintet:

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

hvor vi setter inn $dx/dy = \sqrt{y+1}$ rett fra differensialligningen for y , og får dermed

$$L = \int_0^2 \sqrt{y+2} dy = \left[\frac{2}{3}(y+2)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 2^{3/2}) = \frac{2}{3}(8 - 2\sqrt{2}).$$

Ekstraoppgave

1 Tverrsnittet av tanken i høyde y over bakken er en sirkel med radius

$$\sqrt{r^2 - (y-r)^2} = \sqrt{2ry - y^2},$$

og derfor med areal $A(y) = \pi(2ry - y^2)$. Arbeidet som skal til for å løfte ei skive med tykkelse Δy vil være

$$\Delta W(y_i) = \rho g y_i A(y_i) \Delta y.$$

Vi konstruerer integralet for arbeidet ved å dele opp kula i slike små bidrag, og la Δy gå mot 0. Integrasjonsgrensene får vi ved å observere at vi skal summere bidrag for $y_i \in [0, 2r]$. Altså

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum_i \rho g y_i A(y_i) \Delta y \\ &= \int_0^{2r} \rho g y \pi (2ry - y^2) dy = \frac{4}{3} \pi \rho g r^4. \end{aligned}$$