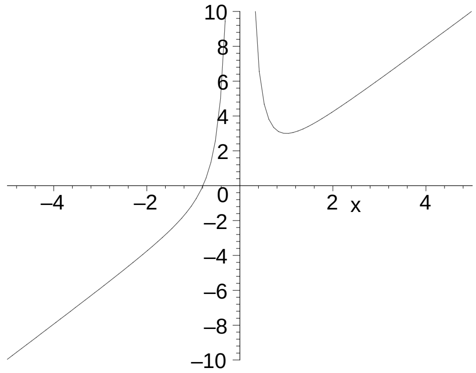
Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.7

42 Gitt $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$. Dette gir:

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$
$$f''(x) = \frac{6}{x^4}$$



når $x \neq 0$. Eneste kritiske punkt er $x = 1$, og dette er et lokalt minimum fordi $f''(1) = 6 > 0$. Siden $f''(x) > 0$ for alle $x \neq 0$, er grafen alltid konkav opp, og den har derfor heller ingen vendepunkter. Eneste ”intercept” er $x = -\frac{1}{2^{1/3}}$ hvor grafen skjærer x-aksen.

$x = 0$ er vertikal asymptote fordi $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, mens $y = 2x$ er skråasymptote fordi $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ (jfr. oppg. 4.MP.93 nedenfor).

Fra Edwards & Penney, avsnitt 4.MP

93 At $\lim_{x\to\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$ er ekvivalent med at $\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = b$. Deler vi på x inne i grensen får vi da at $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{x} = 0$, eller med andre ord at $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$.

Om $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$, så er

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{2/3} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{2/3} = 1,$$

og

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{2/3} - 1}{1/x}\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{-1/3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Det tredje likhetstegnet får du ved å “gange oppe og nede” med $1/x$ (og rydde litt), og det nest siste likhetstegnet får du ved å bruke l’Hôpital’s regel på “null over null uttrykket” i andre linje.

Følgelig har vi en skråasymptote $y = 1 \cdot x - 2/3$. En helt likedan utregning gir samme resultat når $x \to -\infty$.

Induksjonsoppgaver

1 Vi skal vise ved induksjon at summen av de n første hexagontallene er n^3:

$$1 + 7 + 19 + \cdots + (3n^2 - 3n + 1) = n^3.$$

For $n = 1$ består summen bare av leddet 1, og høyre side er $1 = 1^3$. Formelen holder derfor for $n = 1$.

Anta nå at formelen er riktig for $n = k$. Vi *antar* altså at

$$1 + 7 + 19 + \cdots + (3k^2 - 3k + 1) = k^3.$$

Vi må vise at det følger av denne induksjonshypotesen at formelen holder for $n = k + 1$. Vi vil altså vise at

$$1 + 7 + 19 + \cdots + (3(k + 1)^2 - 3(k + 1) + 1) = (k + 1)^3.$$

Ved hjelp av induksjonshypotesen får vi

$$\begin{aligned}
1+7+19+\cdots+(3(k+1)^2-3(k+1)+1) &= 1+7+19+\cdots+(3k^2-3k+1)+(3(k+1)^2-3(k+1)+1) \\
&= \bigl[1 + 7 + 19 + \cdots + (3k^2 - 3k + 1)\bigr] + (3(k + 1)^2 - 3(k + 1) + 1) \\
&= k^3 + (3(k + 1)^2 - 3(k + 1) + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k + 1)^3
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

2 For $n = 1$ har vi $a_1 = 1/3 \in [0, 1]$.

Anta nå at $a_n \in [0, 1]$ for en gitt n (induksjonshypotesen).
Vi må vise at også $a_{n+1} \in [0, 1]$.

Vi har $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n) \geq 0$, siden induksjonshypotesen $0 \leq a_n \leq 1$ garanterer at alle leddene i produktet er ikkenegative.

Det er litt mer arbeid å vise at $a_{n+1} \leq 1$. Men setter vi $f(x) = 4(x - x^2)$, slik at $a_{n+1} = f(a_n)$, finner vi lett maksimumsverdien til f over $[0, 1]$: For $f'(x) = 4-8x$, så eneste kritiske punkt er $x = 1/2$. Undersøker vi dette punktet og endepunktene ($f(0) = f(1) = 0$) ser vi at maksimum må opptre for $x = 1/2$, og siden $f(1/2) = 1$ er $f(x) \leq 1$ for alle $x \in [0, 1]$. Spesielt er $a_{n+1} = f(a_n) \leq 1$.

Vi har altså vist $0 \leq a_{n+1} \leq 1$, som var det vi skulle vise.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.2

28 $\displaystyle\int (2\cos \pi x + 2\sin \pi x)\, dx = \frac{2}{\pi}\sin \pi x - \frac{2}{\pi}\cos \pi x + C.$

32 Ved derivasjon ser vi at funksjonene gitt ved

$$F_1(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad F_2(x) = \frac{x}{1 - x}$$

begge har derivert lik $f(x) = 1/(1 - x)^2$, så F_1 og F_2 er begge antideriverte til f.

Vi har at $F_1(x) - F_2(x) = 1$, altså konstant. Vi kan mao. skrive $F_1(x) = F_2(x) + 1$, i overensstemmelse med teorem 1, som sier at den mest generelle antideriverte til f kan skrives $G(x) = F_2(x) + C$, der C er en konstant. (Eller $G(x) = F_1(x) + \hat{C}$ om man vil).

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.5

56 $f(x) = 1/(1+\sqrt{x})$ er en avtagende funksjon. Derfor gjelder

$$\frac{1}{1+\sqrt{4}} = \frac{1}{3} \geq \frac{1}{1+\sqrt{x}} \geq \frac{1}{1+\sqrt{9}} = \frac{1}{4} \quad \text{for } 4 \leq x \leq 9$$

og derved

$$\frac{1}{3}(9-4) = \frac{5}{3} \geq \int_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \geq \frac{1}{4}(9-4) = \frac{5}{4}$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 5.6

58 Vi skal derivere funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \int_1^{\sin x} (t^2+1)^3 dt.$$

Vi setter

$$y = \int_1^u (t^2+1)^3 dt \quad \text{der} \quad u = \sin x.$$

Ved fundamentalteoremet er $dy/du = (u^2+1)^3$, så kjerneregelen gir at

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (u^2+1)^3 \cos x = (\sin^2 x + 1)^3 \cos x.$$

66 Integralkalkylens fundamentalsetning gir oss

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)\,dx$$

som nettopp er middelverdien av f' over intervallet $[a, b]$.

Her bruker vi egentlig ligning (8) i del 2 av teoremet på side 317, hvor vår f er G i boka, og vår f' er f i boka. Vi må kreve at f' er en kontinuerlig funksjon for at vi skal kunne bruke teoremet. At oppgaven slik den er stilt ikke nevner den betingelsen er antagelig en glipp.