NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5003 Matematikk 1 for F1 høsten 2002

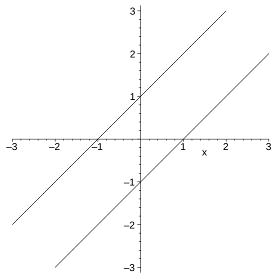
Løsningsforslag - Øving 1

Fra Edwards & Penney, avsnitt 1.MP

$\boxed{36}$

$$|x-y|=1 \quad \Leftrightarrow \quad x-y=\pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm 1+x$$

Grafen består derfor av de to rette linjene $y=x+1$ og $y=x-1$.



Figur 1: Grafen i oppgave 1.MP.16.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.1

$\boxed{34}$ Skal finne ligningene til linjene som går gjennom punktet $(2,5)$ og er tangenter til grafen til $f(x)=4x-x^2$. Se figur. Stigningstallet til f i punktet $(a,4a-a^2)$ er gitt ved $m(a)=4-2a$ (s.58, EP). En linje gjennom punkt $(2,5)$ og $(a,4a-a^2)$ på grafen, har ligning på formen $l(x)=m_l(a)x+\text{konstant}$, hvor

$$m_l(a)=\frac{5-(4a-a^2)}{2-a}.$$

Stigningstallene skal være like:

$$4-2a=\frac{5-(4a-a^2)}{2-a},$$

det vil si at a oppfyller

$$a^2-4a+3=0,$$

og altså er $a=1$ eller $a=3$. La punktet A være punktet hvor $a=1$: $A=(1,3)$, og B være punktet hvor $a=3$: $B=(3,3)$. Stigningstallene i A og B blir da henholdsvis, 2 og -2 (sett inn i m_l). Linjen gjennom A og $(2,5)$ er da gitt ved:

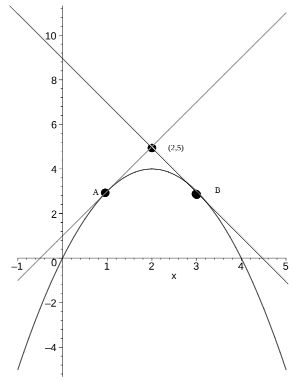
$$l_A(x)=2x+konstant.$$

Ved innsetting av $a=1$ får man at konstanten skal være 1 ($l_A(1)=2+konstant=3$), og dermed er denne linjen gitt ved

$$l_A(x)=2x+1.$$

For linjen gjennom B og $(2,5)$ får man konstanten til å bli 9, og ligningen for denne blir dermed

$$l_B(x)=-2x+9.$$



Figur 2: Oppgave: 2.1.34. Grafen til $f(x)$ samt tangentene $l_A(x)$ og $l_B(x)$.

$\boxed{35}$ Oppgaven kan (naturligvis) løses på flere måter.

Ide 1:

Avstanden måles langs en normal til kurven, en normal som går gjennom punktet $(3,0)$. Vi finner først likningen for denne normalen.

La $(a,\ f(a))=(a,\ a^2)$ være det (foreløpig ukjente) punktet på grafen til

$$y=f(x)=x^2$$

som er slik at normalen til grafen i punktet går gjennom punktet $(3,0)$. Siden tangenten i punktet har stigningstall $f'(a)=2a$, har normalen stigningstall $-1/2a$. Likningen for normalen er derfor

$$\begin{aligned} y-f(a) &= -\tfrac{1}{2a}(x-a) \\ y &= a^2-\tfrac{1}{2a}(x-a) \end{aligned}$$

Siden $(3,0)$ ligger på normalen, må $x=3$, $y=0$ passe i likningen. Det vil si

$$\begin{aligned} 0 &= a^2-\tfrac{1}{2a}(3-a) \\ 0 &= 2a^3-3+a \end{aligned}$$

her er $a = 1$ klart en løsning. Videere er

$$\begin{array}{rl} (\;\; 2a^3 + a - 3) : (a-1) = 2a^2 + 2a + 3 \\ \underline{2a^3 - 2a^2} \\ 2a^2 + a - 3 \\ \underline{2a^2 - 2a} \\ 3a - 3 \\ 3a - 3 \end{array}$$

der polynomet $2a^2+2a+3$ ikke har noen nullpunkter. Altså er $a = 1$ den eneste muligheten.

Korteste avstanden er nå avstanden mellom de to punktene $(3, 0)$ og $(a, a^2)]_{a=1} = (1, 1)$. Det vil si, avstanden er

$$d = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Ide 2:

Kvadratet av avstanden mellom $(3, 0)$ og et vilkårlig punkt (a, a^2) på kurven er

$$d^2 = (3-a)^2 + (0-a^2)^2 = 3 - 6a + a^2 + a^4 = g(a).$$

Vi søker det punktet (a, a^2) som er nærmest $(3, 0)$. Det vil si, vi søker verdien for a som minimaliserer $d^2 = g(a)$. Derivasjon gir

$$g'(a) = -6 + 2a + 4a^3 = 0$$

som egentlig er den samme likningen vi fikk i sted. Den har bare en løsning, nemlig $a = 1$. Siden

$$g''(a)(1) = [2 + 12a^2]_{a=1} = 14 > 0,$$

er dette et minimum.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.2

$\boxed{35}$ Ved tredje kvadratsetning er $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$ der $x - 4 = (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)$. Derfor er

$$\frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}} = \frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{2-\sqrt{x}} = -(x+4)(\sqrt{x}+2)$$

for $x \geq 0$, $x \neq 4$. Dermed gjelder

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{2-\sqrt{x}} = -\lim_{x\to 4}(x+4)(x+\sqrt{2}) = 8 \cdot 4 = 32.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.3

$\boxed{20}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$
$$= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{(2x)} = \frac{2}{3}.$$

$\boxed{27}$ Siden vi alltid har at $-1 \leq \cos t \leq 1$, så er

$$-1 \leq \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \leq 1 \quad \text{for alle} \quad x \neq 0$$

og derved

$$-x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \leq x^2 \quad \text{for alle} \quad x \neq 0.$$

Siden $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$, gir skviseloven at

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

$\boxed{43}$ Når $x > 2$, er $|x-2| = x - 2$, så

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{|2-x|} = \lim_{x\to 2^+}(-1) = -1.$$

Fra Edwards & Penney, avsnitt 2.4

$\boxed{30}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{4-x^2}}$$

$f(x)$ er ikke definert hvis nevneren er lik 0 eller brøken er negativ. Dette gir definisjonsområdet $D_f = (-\infty, -2) \cup [-1, 1] \cup (2, \infty)$. (Tegn fortegnsskjema!)

Funksjonen g gitt ved $g(x) = (1-x^2)/(4-x^2)$ er rasjonal, og derfor kontinuerlig overalt der den er definert (dvs. for $x \neq \pm 2$). Funksjonen h gitt ved $h(x) = \sqrt{x}$ er også kontinuerlig der den er definert ($x \geq 0$), og $f = h \circ g$ (dvs. $f(x) = h(g(x))$ for alle $x \in D_f$). Siden en sammensetning av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig (teorem 2, *Continuity of Compositions*), er derfor f kontinuerlig overalt der den definert.

$\boxed{51}$ Det er klart at $f(x)$ er kontinuerlig for alle $x < 0$, uansett hvilken verdi vi velger for c. Likeså er $f(x)$ kontinuerlig for alle $x > 0$ uansett verdi av c. Det gjenstår å sørge for at $f(x)$ er kontinuerlig for $x = 0$. Det inntreffer når

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Her er $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(c^2 - x^2) = c^2$, mens $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2(x-c)^2 = 2c^2 = f(0)$. Vi må derfor ha at

$$c^2 = 2c^2.$$

Denne ligningen har en og bare en løsning, nemlig $c = 0$.

Ulikhetene

$\boxed{\text{(i)}}$ Vi skal ha både at $0 < |x-2|$ og at $|x-2| < 2$. Den første ulikheten holder for alle x som er slik at $|x-2| \neq 0$, det vil si, for alle $x \neq 2$. Den andre ulikheten holder hvis og bare hvis

$$-2 < x - 2 < 2$$

Adderer vi 2 til alle leddene, får vi $0 < x < 4$. Siden begge ulikhetene skal gjelde, må altså enten $0 < x < 2$ eller $2 < x < 4$.

Alternativt kan vi løse denne oppgaven mer direkte: Uttrykket $|x-2|$ angir avstanden x har fra tallet 2 på den reelle tallinjen. Denne avstanden skal være større enn 0 og mindre enn 2. Et lite bilde av tallinjen viser da at x kan ligge mellom 0 og 2 eller mellom 2 og 4.

(ii) Vi skal løse ulikheten

$$\frac{x+1}{x-1} < x$$

Flytter vi x over på venstre side av ulikheten, tar den formen

$$\frac{x+1}{x-1} - x = \frac{x+1-x^2+x}{x-1} = -\frac{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})}{x-1} < 0$$

Et fortegnsskjema viser at dette holder hvis og bare hvis

$$1-\sqrt{2} < x < 1 \qquad \text{eller} \qquad x > 1+\sqrt{2}$$

Et alternativ er å multiplisere ulikheten med $x-1$, men da må man drøfte tilfellene $x > 1$ og $x < 1$ hver for seg, fordi ulikheten må snus når man multipliserer med noe negativt. Derfor blir løsningen ovenfor enklere, selv om den i utgangspunktet virker mindre intuitiv.

(iii)

$$\begin{aligned} (x-2)^2 &> 4 \\ x^2-4x+4 &> 4 \\ x^2-4x &> 0 \\ x(x-4) &> 0 \end{aligned}$$

Et fortegnskjema viser at dette holder hvis og bare hvis $x < 0$ eller $x > 4$.

Alternativt kan man ta kvadratroten og få $|x-2| > 2$, som gir samme resultat.