Delvis integrasjon og Taylors formel

Harald Hanche-Olsen

2002–11–01

Dette er **ikke pensum** i Matematikk 1, bare noe å se på for spesielt interesserte. Hensikten er å vise at Taylors formel med restledd kan bevises ved hjelp av delvis integrasjon.

Vi begynner med å integrere f' fra a til b, som i følge fundamentalteoremet gir oss $f(b) - f(a)$:

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt = f(a) + \Big[f'(t)\cdot(t-b)\Big]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f''(t)\cdot(t-b)\,dt \\ &= f(a) + f'(a)\cdot(b-a) + \int_a^b f''(t)\cdot(b-t)\,dt \end{aligned}$$

Integralet har jeg delvis-integrert med

$$\begin{aligned} u &= f'(t) & dv &= dt \\ du &= f''(t)\,dx & v &= t-b \end{aligned}$$

Ny delvis integrasjon på det siste integralet, denne gangen med

$$\begin{aligned} u &= f''(t) & dv &= (b-t)\,dt \\ du &= f'''(t)\,dx & v &= -\frac{(b-t)^2}{2} \end{aligned}$$

leder til

$$f(b) = f(a) + f'(a)\cdot(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^b f'''(t)\cdot(b-t)^2\,dt.$$

Fortsetter vi slik, ender vi med *integralutgaven av Taylors formel* (og nå har jeg byttet ut b med x):

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.}$$

Denne formelen vises ved induksjon, der induksjonstrinnet går ut på å bruke delvis integrasjon på integralet.

Restleddet i Taylors formel er altså gitt ved det siste integralet i denne formelen. Merk at denne formelen er eksakt; her er det ingen ukjent z. Men vi kan bevise den vanlige restleddsformelen ved et trick som minner litt om middelverdisetningen for integrasjon (det er faktisk en *generalisert* middelverdisetning):

Om vi antar at $f^{(n+1)}$ er en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, x]$,[1] så vil oppnå sin minimale verdi i et punkt α i dette intervallet, og sin maksimale verdi i et annet punkt β i samme intervall. Det vil si at

$$f^{(n+1)}(\alpha) \leq f^{(n+1)}(x) \leq f^{(n+1)}(\beta) \qquad \text{for alle } t \in [a, x]$$

Denne ulikheten multipliserer vi med $(x-t)^n$ og integrerer fra a til x:

$$\int_a^x f^{(n+1)}(\alpha)(x-t)^n \, dt \leq \int_a^x f^{(n+1)}(x-t)^n \, dt \leq \int_a^x f^{(n+1)}(\beta)(x-t)n \, dt,$$

men i de to ytterste integralene er $f(\alpha)$ og $f(\beta)$ konstanter, så de kan settes utenfor – og så kan integralet løses:

$$f^{(n+1)}(\alpha)\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \leq \int_a^x f^{(n+1)}(x)^n \, dt \leq f^{(n+1)}(\beta)\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Funksjonen $h(t) = f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}/(n+1)$ er kontinuerlig på intervallet mellom α og β, og i følge ulikheten over og skjæringssetningen finnes en z mellom α og β slik at

$$h(z) = f^{(n+1)}(z)\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \int_a^x f^{(n+1)}(x)^n \, dt$$

Vi dividerer denne formelen med $n!$ og ender med

$$\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Og dette siste er jo akkurat formen på restleddet i Taylors formel slik den er kjent fra Edwards og Penney.

Beviset jeg har gitt her krever at $f^{(n+1)}$ er *kontinuerlig*, mens andre beviser kun krever at den $n+1$-te deriverte *eksisterer*. Men de fleste funksjoner vi er interessert i er uendelig deriverbare uansett, så dette er ikke noe stort problem.

[1] Eller $[x, a]$ dersom $x < a$. Jeg regner videre med antagelsen $x > a$ for enkelhets skyld. Dersom $x < a$, må enkelte ulikheter snus om, noen av dem til og med avhengig av om n er et oddetall eller partall – men konklusjonen blir den samme uansett.