

---

---

## Hatteproblemet

$n$  herrer er på restaurant sammen. Alle har hatt, og leverer hatten i garderoben når de kommer. Når de går (litt på en snurr), får hver av dem utdelt en tilfeldig hatt. Hva er *sannsynligheten* for at *ingen av dem* får sin egen hatt tilbake?

(Hva har dette med *potensrekker* å gjøre? Følg med.)

---

---

## Potensrekker

---

---

## Binomialrekken

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1$$

der

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha^{(n)}}{n!}$$

og

$$\alpha^{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

Notasjonen er mye brukt, men ikke universell. Merk at

$$\alpha^{(0)} = 1 \text{ og } \alpha^{(n+1)} = (\alpha - n)\alpha^{(n)}$$

---

---

## Potensrekker

## Hvor kommer binomialrekken fra?

Setter vi  $f(x) = (1+x)^\alpha$  finner vi

$$\begin{array}{ll} f(x) = (1+x)^\alpha & f(0) = 1 \\ f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) = \alpha \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\ \dots & \dots \\ f^{(n)}(x) = \alpha^{(n)}(1+x)^{\alpha-n} & f^{(n)}(0) = \alpha^{(n)} \end{array}$$

så Maclaurinrekken til  $f(x)$  er virkelig

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Men hvordan vet vi at den *konvergerer* mot  $(1+x)^\alpha$ ? Det følger av Taylors formel for  $0 \leq x < 1$ , men er mer vrient å vise for  $-1 < x < 0$ . I det minste sjekker vi lett at *konvergensradius* er 1.

---

### Potensrekker

## Leddvis derivasjon og integrasjon av potensrekker

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ \int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Alle rekkene får *samme konvergensradius*.

Eksempel:

$$\ln(1-x) = - \int_1^x \frac{1}{1-t} dt = - \int_1^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

## Algebraisk manipulasjon av potensrekker

Å *addere* to potensrekker er lett nok:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

Å *multiplisere* dem er litt mer vrient:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right) x^n$$

---



---

### Potensrekker

## Hatteproblemet igjen

$n$  herrer,  $n$  hatter deles ut tilfeldig. Hva er *sannsynligheten*  $p_n$  for at *ingen av dem* får sin egen hatt tilbake?

Først: Sannsynligheten for at presis  $k$  av dem ( $0 \leq k \leq n$ ) får sin egen hatt tilbake er

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{n-k+1} \cdot p_k = \frac{n^{(k)}}{k!} \cdot \frac{1}{n^{(k)}} \cdot p_k = \frac{p_k}{k!}$$

Siden dette må inntreffe for presis en  $k$ , er

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k}{k!} = 1$$

Hva sier dette om funksjonen definert ved potensrekken

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad ?$$

---



---

### Potensrekker

---

---

## Hatteproblemet fortsatt

$$e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Med andre ord,

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \right) x^n$$

og derfor

$$p_n = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$$

( $f$  kalles en *genererende funksjon* for følgen  $\{p_n\}$ . Teknikken med genererende funksjoner er meget nyttig i slike kombinatoriske problemer som dette.)