Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Bjørn Ian Dundas 7355 0242
Harald Hanche-Olsen 7359 3525
Dag Olav Kjellemo 7359 3549
Vigdis Petersen 7359 3523

EKSAMEN I FAG SIF5003 MATEMATIKK 1

Onsdag 6. desember 2000
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: B2 – Typegodkjent kalkulator med tomt minne.
– Rottmann: *Matematisk Formelsamling.*

Sensuren faller i uke 3.

Oppgave 1 skal besvares uten begrunnelse. Alle andre svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen. Rene kalkulatorsvar godtas ikke.

Oppgave 1 La R være området avgrenset av x–aksen, kurven $y = \arctan x$ og linjen $x = \sqrt{3}$. Hvilket integral nedenfor gir volumet av omdreiningslegemet vi får

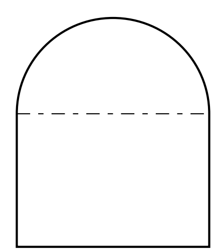
- når R roteres om y–aksen?
- når R roteres om linjen $x = -1$?

Svarene skal ikke begrunnes.

(i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \pi(\arctan x)^2\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \pi(\sqrt{3} - \tan y)^2\,dy$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \pi\big((\sqrt{3}+1)^2 - (1+\tan y)^2\big)\,dy$ (iv) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} 2\pi x \arctan x\,dx$

Oppgave 2 Et kirkevindu skal være innrammet i gull. Det er nok gull til å la omkretsen av vinduet (vinduskarmen) være 10 m lang. Vinduet skal ha form som et rektangel med en halvsirkel på toppen. Finn målene til rektanglet som maksimerer vinduets areal.



Oppgave 3

a) Bestem konvergensradien R for potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+2)4^n}$$

og undersøk om rekken konvergerer for $x = \pm R$.

b) La $g(x)$ betegne summen av rekken i a) for $|x| < R$. Vis at

$$g'(x) = -x \ln\left(1 - \frac{x}{4}\right).$$

Oppgave 4 I følge Taylors formel med restledd får vi

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{(1+z)^{3/2}}$$

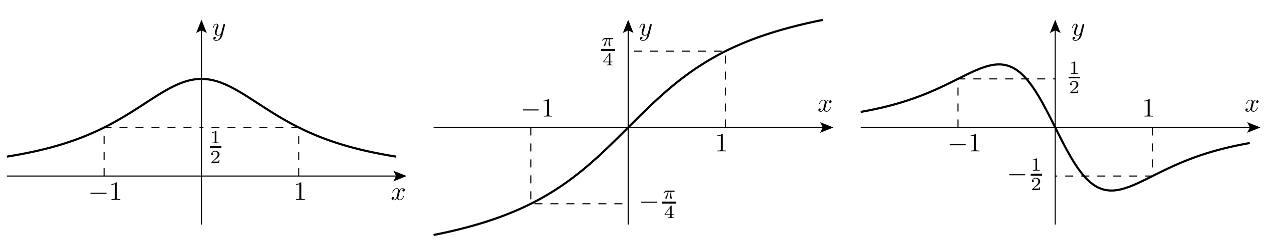
for en z mellom 0 og x. Bruk dette til å vise at

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^4}\, dt = 1{,}1 - R \quad \text{der } \frac{1}{144\sqrt{2}} < R < \frac{1}{72}.$$

Oppgave 5 La f være en gitt funksjon. Figurene A), B) og C) nedenfor viser grafene

$$\text{(i)} \quad y = f(x) \qquad \text{(ii)} \quad y = f'(x) \qquad \text{(iii)} \quad y = \int_0^x f(t)\, dt$$

i en eller annen rekkefølge.



A) B) C)

Hvilken figur viser hvilken graf? Finn $\int_{-1}^{1} f(t)\, dt$.

Oppgave 6 For mange arter av mus er tilveksten avhengig av årstiden. Bestanden vi studerer her, vokser til enhver tid med en rate som er proporsjonal med produktet av antall mus i bestanden og en årstidsavhengig faktor

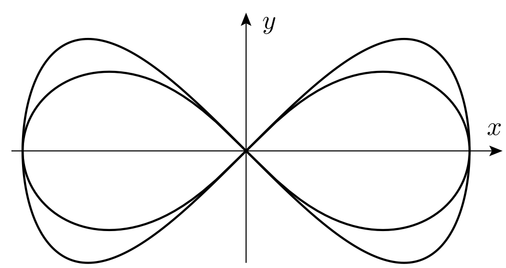
$$1 - \cos(2\pi t)$$

der t angir tidspunktet målt i år etter 1/1–2000. Finn antall mus i bestanden som funksjon av t når den har 10 individer den 1/1–2000 og 20 individer den 1/1–2001.

Oppgave 007 En agent sniker seg med jevn hastighet 0,9 m/s langs en rett hekk. Ti meter fra hekken er det montert et overvåkingskamera som kan dreies horisontalt. Kameraet følger agenten. Hvor raskt (i radianer per sekund) dreier kameraet når han er 30 m vekk fra det?

Oppgave 8 Figuren viser grafen til to kurver. Den ene kurven har parameterfremstilling

$$x = \sin t, \quad y = \frac{1}{2}\sin(2t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$



Beregn arealet av det området denne kurven omslutter i planet.

Den andre kurven er gitt i polarkoordinater ved

$$r^2 = \cos(2\theta).$$

Beregn arealet av det området denne kurven omslutter i planet.

Den ene kurven ligger utenfor den andre kurven. Hvilken av dem ligger ytterst?
Husk at svaret skal begrunnes.

Oppgave 9 Ligningen $x^2 + ye^y = 1$ og ulikheten $y > -1$ definerer implisitt en entydig funksjon $y = f(x)$. Finn $f'(1)$, og bestem Taylorpolynomet av annen grad for f om $x = 1$.