Løsning på oppgave 2.6: 1 i Perko

Først en restart for sikkerhets skyld. Dessuten trenger vi linalg-pakken:

```
> restart; with(linalg):
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

Jeg forklarer mest grundig i punkt (a), for de andre punktene kommenterer jeg bare det som blir forskjellig.

Punkt (a)

Dette kunne sikkert vært gjort mye smartere, men jeg hadde det travelt. I stedet for å lage meg prosedyrer, bare bruker jeg klipp og lim for å gjenta en prosedyre med lett varierende data. Først definerer jeg høyresiden i punkt (a). Jeg indekserer alt med symbolet a, slik at jeg skiller punktene fra hverandre.

```
> f[a]:=[x1-x1*x2, x2-x1^2];
```

$$f_a := [x1 - x1\,x2,\ x2 - x1^2]$$

Så deriverer vi. diff(f[a],x1) ville derivere f[a] med hensyn på x1. Vi vil derivere med hensyn både x1 og x2, og til det egner map seg bra. Så bygger vi en matrise av resultatet, men dette bli transponert i forhold til de konvensjoner vi foretrekker, så vi transponerer til slutt.

```
> Df[a]:=transpose(matrix(2,2,map(x->diff(f[a],x),[x1,x2])));
```

$$Df_a := \begin{bmatrix} 1 - x2 & -x1 \\ -2\,x1 & 1 \end{bmatrix}$$

Så finner vi nullpunktene. solve vil ha en mengde av ligninger eller uttrykk å sette lik 0, men f[a] er en liste. op(f[a]) pakker elementene ut av listen, og {} bygger en mengde av resultatet. Merk at svaret er en sekvens av mengder som hver består av tilordninger. Vi pakker sekvensen inn i en liste med [] for at det skal være lett å hente ut elementene etterpå.

```
> zeros[a]:=[solve({op(f[a])},{x1,x2})];
```

$$zeros_a := [\{x1 = 0, x2 = 0\}, \{x1 = 1, x2 = 1\}, \{x1 = -1, x2 = 1\}]$$

Først tar vi origo, som viser seg å være en ustabil node. Det koden nedenfor er å utføre substitusjonene {x1 = 0, x2 = 0} på hvert element i Df_a med map.

```
> zeros[a][1]; map(x->subs(zeros[a][1],x),Df[a]);
```

$$\{x1 = 0, x2 = 0\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Så tar vi (1,1) som viser seg å være et sadelpunkt (her regner vi ut egenverdiene til matrisen for finne ut av dette).

```
> zeros[a][2]; map(x->subs(zeros[a][2],x),Df[a]);
```

$$\{x1 = 1, x2 = 1\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(");
```

$$-1,\ 2$$

(-1,1) viser seg også å bli et sadelpunkt:

```
> zeros[a][3]; map(x->subs(zeros[a][3],x),Df[a]);
```

$$\{x2 = 1, x1 = -1\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(");
```

$$-1, 2$$

Punkt (b)

```
> f[b]:=[-4*x2+2*x1*x2-8,4*x2^2-x1^2];
```

$$f_b := [-4\,x2 + 2\,x1\,x2 - 8,\ 4\,x2^2 - x1^2]$$

```
> Df[b]:=transpose(matrix(2,2,map(x->diff(f[b],x),[x1,x2])));
```

$$Df_b := \begin{bmatrix} 2\,x2 & -4 + 2\,x1 \\ -2\,x1 & 8\,x2 \end{bmatrix}$$

```
> zeros[b]:=[solve({op(f[b])},{x1,x2})];
```

$$zeros_b := [\{x2 = \text{RootOf}(_Z + _Z^2 + 2),\ x1 = -2\,\text{RootOf}(_Z + _Z^2 + 2)\},$$
$$\{x2 = -1,\ x1 = -2\},\ \{x2 = 2,\ x1 = 4\}]$$

Det første nullpunktet blir ikke reelt, så det hopper vi over. (RootOf er simpelthen nullpunktet(-ene) til polynomet i argumentet).

```
> zeros[b][2]; map(x->subs(zeros[b][2],x),Df[b]);
```

$$\{x2 = -1,\ x1 = -2\}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(");
```

$$-5 + I\sqrt{23},\ -5 - I\sqrt{23}$$

og det var en stabil spiral.

```
> zeros[b][3]; map(x->subs(zeros[b][3],x),Df[b]);
```

$$\{x2 = 2,\ x1 = 4\}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(");
```

$$8, 12$$

og det var en ustabil node.

Punkt (c)

```
> f[c]:=[2*x1-2*x1*x2,2*x2-x1^2+x2^2];
```

$$f_c := [2\,x1 - 2\,x1\,x2,\ 2\,x2 - x1^2 + x2^2]$$

```
> Df[c]:=transpose(matrix(2,2,map(x->diff(f[c],x),[x1,x2])));
```

$$Df_c := \begin{bmatrix} 2 - 2\,x2 & -2\,x1 \\ -2\,x1 & 2 + 2\,x2 \end{bmatrix}$$

```
> zeros[c]:=[solve({op(f[c])},{x1,x2})];
```

$$zeros_c := [\{x1 = 0,\ x2 = 0\},\ \{x1 = 0,\ x2 = -2\},\ \{x2 = 1,\ x1 = \text{RootOf}(-3 + _Z^2)\}]$$

```
> zeros[c][1]; map(x->subs(zeros[c][1],x),Df[c]);
```

$$\{x1 = 0,\ x2 = 0\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

og det var en ustabil node.

```
> zeros[c][2]; map(x->subs(zeros[c][2],x),Df[c]);
```

$$\{x1 = 0, x2 = -2\}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

som er et sadelpunkt.

```
> zeros[c][3]; map(x->subs(zeros[c][3],x),Df[c]);
```

$$\{x2 = 1, x1 = \text{RootOf}(-3 + _Z^2)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2\,\text{RootOf}(-3 + _Z^2) \\ -2\,\text{RootOf}(-3 + _Z^2) & 4 \end{bmatrix}$$

```
> egigenvalues(");
```

$$-2, 6$$

også et sadelpunkt.

Punkt (d)

```
> f[d]:=[-x1,-x2+x1^2,x3+x1^2];
```

$$f_d := [-x1, -x2 + x1^2, x3 + x1^2]$$

```
> Df[d]:=transpose(matrix(3,3,map(x->diff(f[d],x),[x1,x2,x3])))
  ;
```

$$Df_d := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2\,x1 & -1 & 0 \\ 2\,x1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> zeros[d]:=[solve({op(f[d])},{x1,x2,x3})];
```

$$zeros_d := [\{x1 = 0, x2 = 0, x3 = 0\}]$$

```
> zeros[d][1]; map(x->subs(zeros[d][1],x),Df[d]);
```

$$\{x1 = 0, x2 = 0, x3 = 0\}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og det var altså bare origo som var likevektspunkt, og det er et sadelpunkt. Den stabile mangfoldigheten blir todimensjonal, og den ustabile mangfoldigheten blir endimesjonal.

Punkt (e)

```
> f[e]:=[x2-x1,k*x1-x2-x1*x3,x1*x2-x3];
```

$$f_e := [x2 - x1, k\,x1 - x2 - x1\,x3, x1\,x2 - x3]$$

```
> Df[e]:=transpose(matrix(3,3,map(x->diff(f[e],x),[x1,x2,x3])))
  ;
```

$$Df_e := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ k - x3 & -1 & -x1 \\ x2 & x1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> zeros[e]:=[solve({op(f[e])},{x1,x2,x3})];
```

$$zeros_e := [\{x1 = 0, x2 = 0, x3 = 0\},$$

$$\{x1 = \text{RootOf}(-k + 1 + _Z^2), x2 = \text{RootOf}(-k + 1 + _Z^2), x3 = -1 + k\}]$$

```
> zeros[e][1]; map(x->subs(zeros[e][1],x),Df[e]);
```

$$\{x1 = 0, x2 = 0, x3 = 0\}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(");
```

$$-1, -1 + \sqrt{k}, -1 - \sqrt{k}$$

så origo blir et sluk dersom k<1 og et sadelpunkt om k>1.

```
> zeros[e][2]; map(x->subs(zeros[e][2],x),Df[e]);
```

$$\{x1 = \text{RootOf}(-k + 1 + _Z^2), x2 = \text{RootOf}(-k + 1 + _Z^2), x3 = -1 + k\}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\text{RootOf}(-k + 1 + _Z^2) \\ \text{RootOf}(-k + 1 + _Z^2) & \text{RootOf}(-k + 1 + _Z^2) & -1 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(");
```

$$-2, \text{RootOf}(_Z^2 + _Z - 1 + k)$$

Jeg vet ikke om Perko hadde tenkt at vi skulle ta med dette nullpunktet, som er reelt når k>1. Legg merke til at den siste egenverdien i virkeligheten er to egenverdier, slik at det er tre egenverdier i alt.