75045 Dynamiske systemer 3. juni 1997

Løsningsforslag

Oppgave 1

a $\dot{x} = 0$ gir $y = \pm x$, og dette innsatt i $\dot{y} = 0$ gir $1 \pm 2x^2 = 0$. Vi må velge minustegnet, og får $x = -y = \pm 1/\sqrt{2}$. Vi deriverer:

$$\mathrm{D}f(x,y) = 2\begin{bmatrix} -x & y \\ y & x \end{bmatrix}; \qquad \mathrm{D}f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen er symmetrisk, så den har reelle egenverdier (med ortogonale egenvektorer). Determinanten er negativ, så egenverdiene har motsatt fortegn, og $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ er et sadelpunkt for lineariseringen. Det er også et topologisk sadelpunkt (for hyperbolske likevektspunkt for C^1 systemer i planet er dette ekvivalent med at punktet er sadelpunkt for lineariseringen).

Systemet er symmetrisk i den forstand at det er uendret om vi erstatter x med $-x$, y med $-y$ og t med $-t$. Spesielt er likevektspunktet i $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ av samme type, det vil si lineært og topologisk sadelpunkt.

Om systemet har en periodisk bane må denne omslutte likevektspunkter slik at summen av indeksene til disse er 1. Siden de eneste likevektspunktene er sadler og således har indeks -1, finnes ingen periodiske baner.

b Vi skal skrive systemet på formen

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

og Hamiltonfunksjonen H skal altså oppfylle

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y^2 - x^2, \quad -\frac{\partial H}{\partial x} = 1 + 2xy.$$

Den første av disse to ligningene integreres til $H(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - x^2y + F(x)$ der F er en vilkårlig funksjon. Satt inn i den andre ligningen gir det $2xy - F'(x) = 1 + 2xy$ som krever $F'(x) = -1$, som heldigvis kan løses siden høyresiden ikke inneholder y. En Hamiltonfunksjon finnes altså, og kan gis ved

$$H(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - x^2y - x.$$

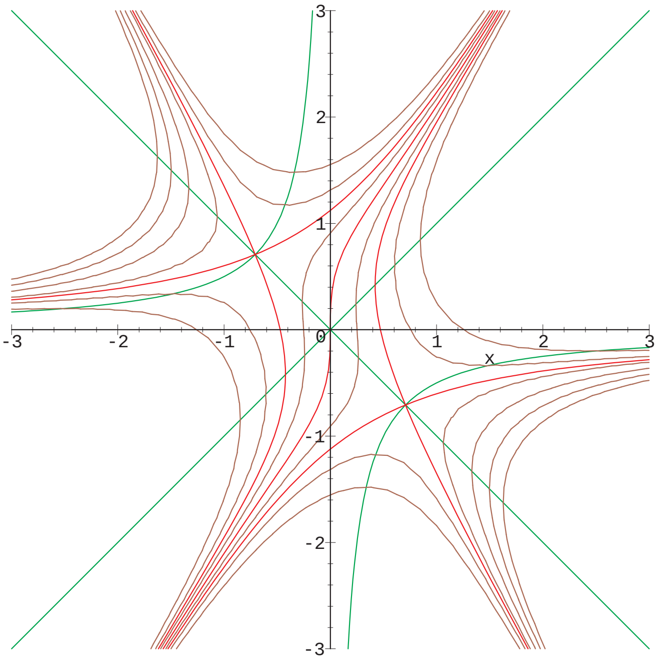
Siden H er invariant langs banene, vil banen gjennom origo oppfylle $H(x,y) = H(0,0) = 0$. Vi løser annengradsligningen $yx^2 + x - \frac{1}{3}y^3 = 0$ med hensyn på x, og finner

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{3}y^4}}{2y}$$

men hvis denne kurven skal passere gjennom $(0,0)$ må vi velge plusstegnet, og får

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}y^4}}{2y} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}y^4}}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}y^4}} = \frac{2y^3}{3\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}y^4}\right)}$$

som vi skulle.



Figuren viser separatrisene (de stabile og ustabile mangfoldighetene til likevektspunktene) og utvalgte baner. I tillegg er kurvene hvor $\dot{x}$ eller $\dot{y}$ skifter fortegn vist. (Hvis du får dette dokumentet ad elektronisk vei mangler det piler som viser hvilken retning strømmen går langs banene. Figuren er tegnet med Maple. Selvsagt ventes ikke en slik presisjon fra en håndtegnet figur! Men utseendet på separatrisene bør man i hovedtrekk klare. At separatrisene og andre baner må krysse aksene såvel som diagonalene og generelt gå i den retningen som er vist, kan man utlede av fortegnene til $\dot{x}$ og $\dot{y}$ i hvert område.)

Oppgave 2

a Lineariseringen i origo blir

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = y$$

siden alle de andre leddene har derivert null for $x = y = 0$.

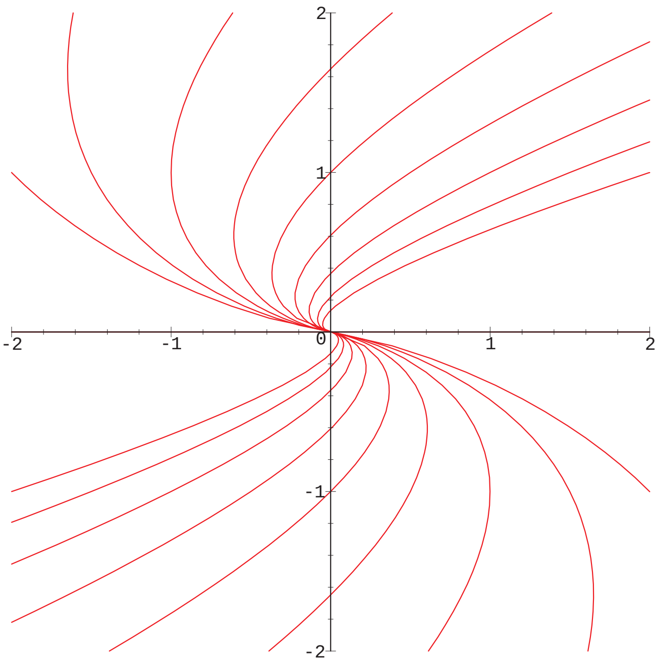
Strømmen til et system $\dot{z} = f(z)$ er funksjonen $\varphi_t(z_0)$ definert ved $\partial\big(\varphi_t(z_0)\big)/\partial t = f\big(\varphi_t(z_0)\big)$ og $\varphi_0(z_0) = z_0$; det vil si, det er løsningen av systemet gitt initialverdien $z = z_0$ for $t = 0$. (Vi kunne lagt til en diskusjon av eksistensintervaller og relasjonen $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$, men det var ikke meningen å spørre om det.)

Strømmen til lineariseringen er gitt ved eksponensialen til matrisen til systemet:

$$\varphi_t(z_0) = e^{tA} z_0; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N; \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi finner $e^{tA} = e^t e^{tN} = e^t(I + tN)$ siden $N^2 = 0$, og dermed

$$\varphi_t\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(x + ty) \\ e^t y \end{bmatrix}.$$



De to halvdelene av x–aksen er også baner, men det viste seg vanskelig å få det med på figuren.

b Polarkoordinater gir

$$\dot{r} = \frac{1}{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) = r(1 + \sin\theta\cos\theta) - r^3$$

slik at $\dot r < 0$ for $r > \sqrt{3/2}$ og $\dot r > 0$ for $0 < r < \sqrt{1/2}$. Annulusen $\sqrt{1/2} \le r \le \sqrt{3/2}$ er derfor (forlengs) invariant for systemet. Vi må undersøke om det finnes likevektspunkter i denne annulusen. Hvis ikke, vil Poincaré-Bendixson garantere eksistensen av en periodisk bane innenfor annulusen. Men nå er

$$\dot\theta = \frac{1}{r^2}(x\dot y - y\dot x) = -sin^2\theta - r^2 < 0,$$

så det finnes ingen likevektspunkter utenfor origo, og vi har vist at det eksisterer en periodisk bane.

Oppgave 3

Liapunov-funksjonen $V(x,y) = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$ gir

$$\dot V = x^3\dot x + y^3\dot y = x^4y^2 - x^4y^4 = x^4y^2(1-y^2) > 0$$

når $|y| < 1$ og $xy \neq 0$, så origo er ustabilt.

Oppgave 4

a Vi finner

$$\dot H = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x(t)) = \nabla H(x(t)) \cdot \dot x(t) = \nabla H(x(t)) \cdot f(x(t)) = g(x(t))H(x(t)),$$

slik at funksjonen $u(t) = H(x(t))$ løser $\dot u(t) = a(t)u(t)$ der $a(t) = g(x(t))$. Dersom $u(0) = 0$ er $u(t) = 0$ for alle t ved entydighetsteoremet for løsning av initialverdiproblemet.

Perko ser ut til å ikke ha entydighetsteoremet for denne situasjonen (han konsentrerer seg om autonome systemer og C^1 høyresider), men det er ikke vanskelig å vise direkte ved hjelp av Grönwalls ulikhet. Vi godkjenner likevel et svar etter linjene i forrige avsnitt.

b Vi setter $H(x,y,z) = xy + z$ så $\nabla H(x,y,z) = (y,x,1)$, og regner ut $\nabla H \cdot f$ hvor f er høyresiden i systemet:

$$\begin{aligned}\nabla H \cdot f &= y\big(-x-y+(xy+z)x\big) + x\big(-2y+(xy+z)y\big) + 3xy + y^2 + (xy+z)(1+x^2+y^2)\\ &= (xy+z)(\cdots)\end{aligned}$$

hvor leddene som ikke er multiplisert med $xy+z$ kansellerer, og den presise formen på resten er irrelevant – bortsett fra kontinuiteten, som er opplagt fordi det dreier seg om et polynom. Ved resultatet fra punkt a) er flaten invariant.

Åpenbart kan (x, y) brukes som koordinater på flaten $xy + z = 0$, og strømmen er gitt ved et system vi får fra de to første ligningene i det gitte systemet:

$$\dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = -2y$$

Dette er et lineært, stabilt system (egenverdier -1 og -2). Spesielt vil løsningen konvergere mot origo for enhver initialverdi på flaten $xy + z = 0$.

En kort og grei beskrivelse av den stabile mangfoldigheten $W^S(x_0)$ og den ustabile mangfoldigheten $W^U(x_0)$ er at $W^S(x_0)$ består av alle punkter x slik at $\varphi_t(x) \to x_0$ når $t \to \infty$ (hvor φ er strømmen til systemet av differensialligninger), mens $W^U(x_0)$ består av alle punkter x slik at $\varphi_t(x) \to x_0$ når $t \to -\infty$.

Lineariseringen av det fulle systemet i origo blir

$$\dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = -2y, \quad \dot{z} = z$$

og vi ser at det stabile underrommet blir xy–planet, mens det ustabile underrommet blir z–aksen. Ut fra hintet venter vi at z–aksen blir den ustabile mangfoldigheten, og vi ser fort at z–aksen virkelig er invariant, siden $\dot{x} = \dot{y} = 0$ når $x = y = 0$. Langs z–aksen blir $\dot{z} = z$, så den ustabile mangfoldigheten blir hele z–aksen, mens den stabile mangfoldigheten blir flaten $xy + z = 0$.

Oppgave 5

Mengden C_a dannes ved hjelp av fire similituder ψ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ som avbilder det opprinnelige linjestykket på hvert av de fire del-linjene: Den første er simpelthen en krympning med en faktor a (om vi tenker oss at origo ligger i venstre endepunkt av det opprinnelige linjestykket), og de andre er en slik krympning etterfulgt av en translasjon og kanskje en rotasjon i planet. Formelen for fraktal dimensjon i denne sammenhengen gir oss uten videre

$$4a^{D_a} = 1 \quad \text{hvorav } D_a = \frac{\ln 4}{\ln \dfrac{1}{a}}.$$

Resonnementet krever en overlappingsbetingelse. Det er ikke vanskelig å se at hele C_a må ligge innenfor en likebent, rettvinklet trekant T med L som hypotenus, og trekantene $\psi_i(T)$ vil ikke snitte hverandre parvis i mer enn nøyst ett hjørne – slik at mengdene $\psi_i(C_a)$ sikkert tilfredsstiller overlappingsbetingelsen (vi kan ikke være mer presise enn dette, siden pensumlitteraturen er heller vag på dette punktet).

Vi finner

$$\lim_{a \to 1/4} D_a = 1 \quad \text{og} \quad \lim_{a \to 1/2} D_a = 2$$

som er rimelig, siden C_a nærmer seg linjestykket L når $a \to \frac{1}{4}$ mens den nærmer seg å fylle hele trekanten T når $a \to \frac{1}{2}$.

Oppgave 6

a Anta Γ er en bane for et C^1 system av differensialligninger i et åpent område $E \subseteq \mathbb{R}^2$ og at Γ_+ er inneholdt i en kompakt delmengde av E. Hvis $\omega(\Gamma)$ ikke inneholder noe likevektspunkt for systemet, er $\omega(\Gamma)$ en periodisk bane for systemet.

b En periodisk attraktor er en periodisk bane Γ som har en omegn U slik at hver gang $x_0 \in U$ er $\varphi_t(x_0) \in U$ for alle $t > 0$, og avstanden fra $\varphi_t(x_0)$ til Γ går mot null når $t \to \infty$ (vi sier litt løst at banen konvergerer mot Γ).

La Γ være en periodisk bane med punkter x_0 og y_0 som beskrevet i oppgaven. Dra et transversalt linjestykke l som skjærer Γ. Banene fra x_0 og y_0 må før eller siden skjære l, og de må skjære l på ny i punkter som ligger suksessivt nærmere Γ. Området i planet begrenset av l og de to banene fra en skjæring med Γ til den neste er forlengs invariant, for ingen bane kan forlate området (baner skjærer ikke hverandre — takket være entydighetsteoremet for initialverdiproblemet — og de kan ikke forlate området via l, for der går strømmen *inn* i området). En bane som starter innen dette området vil altså alltid ligge i området, og må konvergere mot Γ fordi den blir inneklemt mellom de gitte banene.