MA2104 Differensiallikninger og kompleks funksjonsteori:
Selvtest 31. oktober 2007.
Se hvor mye du klarer å få til på to timer uten andre hjelpemidler enn formelarket på slutten – og eksamenskalkulatoren, om du da finner noe du kan bruke den til ...
En fasit vil komme snart.

Du finner noen formler på side 3.

Oppgave 1: Hva er

$$\max \frac{1}{|z-3i|} \qquad \text{når } |z+4| \le 2?$$

Oppgave 2: Hva er polarformen av

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^4} \quad ?$$

Oppgave 3: Finn alle verdier av $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^i$.

Oppgave 4: Finn alle løsninger av likningen $z^4+z=0$.
Svar på formen $a+ib$.

Oppgave 5: Finn alle løsninger av likningen $\cos^2 z - \sin^2 z = 1$.

Oppgave 6: For hver av følgende mengder, avgjør om den er åpen, lukket, sammenhengende, enkeltsammenhengende.

$$\begin{aligned}
&\text{A:} \quad \Big\{z\colon z \ne 0 \text{ og } \tfrac{1}{3}\pi < \operatorname{Arg} z \le \tfrac{2}{3}\pi\Big\} \\
&\text{B:} \quad \Big\{z\colon z \ne 0 \text{ og } \tfrac{1}{3}\pi < |\operatorname{Arg} z| \le \tfrac{2}{3}\pi\Big\} \\
&\text{C:} \quad \Big\{z\colon 1 \le |e^z| \le 2\Big\} \\
&\text{D:} \quad \Big\{e^z\colon 1 < \operatorname{Re} z < 2\Big\}
\end{aligned}$$

Oppgave 7: Beregn

$$\int_{C_3(1-4i)} \frac{dz}{z+5i}$$

Her og senere, står $C_r(z)$ for sirkelen med sentrum i z og radius r, tatt en gang i positiv omløpsretning.

Oppgave 8: Beregn

$$\int_{C_2(1-4i)} \frac{\operatorname{Ln} z}{z+5i}\, dz$$

Oppgave 9: Beregn $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - z}$ der

$$\begin{aligned}
&\text{A:} \quad \gamma = C_1(-2)\\
&\text{B:} \quad \gamma = C_1(-\tfrac{1}{2})\\
&\text{C:} \quad \gamma = C_3(-1)\\
&\text{D:} \quad \gamma(t) = 1 - t + ti, \qquad 0 \le t \le 1.
\end{aligned}$$

Oppgave 10: For hver av disse følgene, beregn grensen når $n \to \infty$ (hvor n skal være heltall) om den eksisterer (som komplekst tall eller ∞), eller svar «nei» om den ikke eksisterer.

$$\begin{aligned}
&\text{A:} \quad \frac{n + 3i}{4 - in}\\
&\text{B:} \quad e^{-n}\cos(in)\\
&\text{C:} \quad \left(\frac{3+2i}{5}\right)^n\\
&\text{D:} \quad \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n
\end{aligned}$$

Oppgave 11: Nedenfor er Ω et begrenset område i $\mathbb{C}$, og $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ er en kontinuerlig funksjon. Hvilke av følgende påstander er da riktige?

A Hvis f er analytisk i Ω og γ er en lukket vei i Ω så er $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

B Hvis $f'(z)$ eksisterer for alle $z \in \Omega$ så er f' kontinuerlig.

C Hvis det finnes en omegn om ethvert punkt i Ω slik at $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ for alle lukkede veier γ i denne omegnen, så er f analytisk.

Oppgave 12: Funksjonen f har periode 2π og er slik at

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Bestem koeffisientene i den reelle Fourierrekken for f. Konvergerer Fourierrekken overalt? Tegn en skisse som viser verdien av summen av Fourierrekken for $-2\pi \le x \le 2\pi$ der hvor rekken konvergerer.

Oppgave 13: Bestem og klassifisér alle singularitetene, og angi ordenen til polene, til funksjonen f gitt ved

$$f(z) = \frac{1}{(z^4 - 1)\sin\dfrac{\pi}{z}}.$$

Noen nyttige formler *uten forklaring.*
Du forventes å vite når og hvordan de skal brukes.

De Moivres formel: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Cauchy–Riemann-ligningene: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Noen komplekse funksjoner:

$$e^z = \exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$\ln z = \log z = \ln|z| + i\arg z, \quad \operatorname{Ln} z = \operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$$
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

Cauchys generaliserte formel:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

Noen potensrekker:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$
$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$
$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Noen trigonometriske identiteter:

$$\sin(u \pm v) = \sin u\cos v \pm \cos u \sin v \qquad \cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$
$$\sin 2u = 2\sin u \cos u \qquad \begin{aligned}\cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u \\ &= 2\cos^2 u - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 u\end{aligned}$$
$$2\sin u\cos v = \sin(u-v) + \sin(u+v) \qquad 2\cos u \cos v = \cos(u-v) + \cos(u+v)$$
$$2\sin u \sin v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$$

Fourierrekker for en peridoisk funksjon med periode $2L$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L}\,dx,$$
$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Cosinus- og sinusrekker for en funksjon definert på $[0, L]$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Noen integraler:

$$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x\, dx$$

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

$$\int x^n (\ln x)^m\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln x)^{m-1}\, dx$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$\int x^m \cos bx\, dx = \frac{x^m \sin bx}{b} - \frac{m}{b} \int x^{m-1} \sin bx\, dx$$

$$\int x^m \sin bx\, dx = -\frac{x^m \cos bx}{b} + \frac{m}{b} \int x^{m-1} \cos bx\, dx$$