MA2104 høsten 2007, Øving 13 uke 47: Løsningsforslag til øvingene

Oppgave MNFMA213 1998–12–10 #5:

a) Ligningen blir $4X''T = XT''$. Standardmetoden gir $X = \sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ slik at T-ligningen blir $T'' = -4n^2T$. Svaret får formen

$$u_n(x,t) = \sin nx \cdot (b_n \cos 2nt + b_n^* \sin 2nt), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) Legger vi opp slike løsninger som over, har vi en mer generell kandidat for en løsning:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot (b_n \cos 2nt + b_n^* \sin 2nt).$$

De gitte initialdataene blir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sin 2x + 3\sin 5x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n^* \sin nx = 3\sin 4x - \sin 3x.$$

Disse er trivielle å oppfylle – uttrykkene på høyre side *er allerede* bittesmå Fourierrekker! Så vi trenger bare sammenligne koeffisienter: $b_2 = 1$, $b_5 = 3$, alle andre $b_n = 0$, og $8b_4^* = 3$, $6b_3^* = -1$, alle andre $b_n^* = 0$.

$$u(x,t) = \sin 2x \cos 4t - \tfrac{1}{6}\sin 3x \sin 6t + \tfrac{3}{8}\sin 4x \sin 8t + 3\sin 5x \cos 10t.$$

Oppgave MNFMA214 2002–05–16 #2:

a) Den gitte funksjonen er rasjonal, så alle singularitetene er poler. Vi faktoriserer nevneren:

$$z^3 - 3z^2 - 2z = (z^2 - 3z - 2)z = \big((z - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{17}{4}\big)z = (z - \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{17})(z - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{17})z$$

(det er selvsagt i orden å bruke formelen for løsningen av annengradsligningen for å finne røttene).

Alle nullpunktene $z = z_\pm = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}$, $z = 0$ i nevneren er enkle, og de er ikke nullpunkter i telleren, så hver er en enkel pol.

b) *Note*: *Dette spørsmålet leder til for mye regning for en god eksamensoppgave.*

Bortsett fra $z = 0$, så er polen nærmest origo gitt ved $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}$, så problemet tar feil når det påstås at det finnes en Laurentrekke gyldig for $0 < |z| < 1$. Ve er nødt til å nøye oss med en rekke som gjelder for $0 < |z| < \frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{3}{2}$ istedet.

Det er greit å gjennomføre en delbrøkoppspalting, og en smart måte å gjøre dét på, er å beregne alle residuene (denne teknikken virker bare når alle polene er enkle):

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{3z^2 - 6z + 2}{z^2 - 3z - 2}\bigg|_{z=0} = -1,$$

og

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_\pm) &= \frac{3z^2 - 6z + 2}{(z - z_\mp)z}\bigg|_{z=z_\pm} = \frac{3z_\pm^2 - 6z_\pm + 2}{(z_\pm - z_\mp)z_\pm} \\ &= \frac{3z_\pm - 6 + 2/z_\pm}{\pm\sqrt{17}} = \frac{3z_\pm - 6 - z_\mp}{\pm\sqrt{17}} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{17}}{\pm\sqrt{17}} = 34 \mp 3\sqrt{17}\end{aligned}$$

I annen rad har jeg utnyttet at $z_+z_- = -2$ (siden de er nullpunktene i $z^2 - 3z - 2$: konstantleddet i et monisk polynom er produktet av røttene).

Nå er vi kommet til poenget, som er at i delbrøkoppspaltingen

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B_+}{z - z_+} + \frac{B_-}{z - z_-}$$

kan vi umiddelbart lese ut residuene: De er A i $z = 0$ og $B_\pm$ i $z = z_\pm$. Snur vi dette på hodet, siden vi *vet* hva residuene er, så må

$$A = -1, \quad B_\pm = \operatorname{Res}(f, z_\pm) = 34 \mp 3\sqrt{17},$$

slik at

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{34 - 3\sqrt{17}}{z - z_+} + \frac{34 + 3\sqrt{17}}{z - z_-}$$

og den ønskede Laurentrekken er

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} - (34 - 3\sqrt{17}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_+^{n+1}} - (34 + 3\sqrt{17}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_-^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{34 - 3\sqrt{17}}{(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17})^{n+1}} + \frac{34 + 3\sqrt{17}}{(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17})^{n+1}} \right) z^n. \end{aligned}$$

c) Heldigvis trenger vi ikke hele resultatet ovenfor for å besvare dette punktet. Vi trenger bare vite at dene eneste polen, i $z = 0$, er innenfor den gitte sirkelen. (Den neste er *like* utenfor.) Og residuen i $z = 0$ var den letteste å beregne ovenfor: Den er -1. Så integralet er $-2\pi i$.

Oppgave MNFMA214 2003–05–19 #5: Funksjonen $e^{f(z)}$ er også hel, og $|e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(x)} \le e^M$. Ved Liouvilles teorem er $e^{f(z)}$ konstant. Så er også f konstant.

Oppgave MA2104 2004–12–13 #3:

a) Si singulære punktene er der hvor $\cosh z = 0$. Det vil si $e^z + e^{-z} = 0$, ekvivalent $e^{2z} + 1 = 0$. Dette skjer presis der $2z = (2k+1)i\pi$ med $k \in \mathbb{Z}$, med andre ord for $z = (k + \frac{1}{2})i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Den deriverte av $\cosh z$ i disse punktene er $\sinh z = \sinh(k + \frac{1}{2})i\pi = i \sin(k + \frac{1}{2})\pi = (-1)^k \neq 0$, så polene er enkle.

b) Rektangelet er en lukket vei som omslutter presis en av polene, nemlig den i $z = \frac{1}{2}i\pi$. Residuet der er $1/\sinh \frac{1}{2}i\pi = 1/i$, så det gitte integralet er $2\pi i/i = 2\pi$.

c) Vi er nødt til å vise at $\cosh z$ blir stor: Skriv $z = x + iy$ med $x = \pm R$ og $0 \le y \le \pi$.

Når $x = R$ så blir $|e^z| = e^x = e^R$ og $|e^{-z}| = e^{-x} = e^{-R} < 1$, så $|\cosh z| = \frac{1}{2}|e^z + e^{-z}| \ge \frac{1}{2}e^R - 1$. Vi får det samme estimatet når $x = -R$. Så $|f(z)| \le 2/(e^R - 1)$ for z på en av de vertikale sidene i rektangelet. Derfor er absoluttverdien av integralet langs en av de vertikale sidene mindre enn eller lik $2\pi/(e^R - 1) \to 0$ når $R \to \infty$.

d) Vi har $\cosh(x + \pi i) = -\cosh x$, så integralene langs topp og bunn av rektangelet er like når de gjøres med den viste orienteringen. Så $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \pi$. Ved symmetri er det gitte integralet halparten av det igjen:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\cosh x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Oppgave MA2104 2004–12–13 #5: Det gitte integralet kan skrives som et kurveintegral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta}\,d\theta = \int_{C_1(0)} \frac{\frac{1}{2}(z+z^{-1})}{\sqrt{2}+\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\,\frac{dz}{iz} = -i\int_{C_1(0)} \frac{z^2+1}{(z^2+2\sqrt{2}z+1)z}\,dz$$

Vi trenger å faktorisere nevneren: $z^2+2\sqrt{2}z+1 = (z+\sqrt{2})^2-1 = (z+1+\sqrt{2})(z-1+\sqrt{2})$. Bare ett nullpunkt er innenfor enhetssirkelen, nemlig $z = 1-\sqrt{2}$.

Integranden har en pol i $z = 0$, med residue 1, og en annen pol i $z = 1-\sqrt{2}$, med residue

$$\left.\frac{z^2+1}{(z+1+\sqrt{2})z}\right|_{z=1-\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{2})} = -\sqrt{2}.$$

Vi adderer residuene og multipliserer med $2\pi i$ og faktoren $-i$ som ble satt utenfor i første linje, og ender med

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta}\,d\theta = 2\pi(1-\sqrt{2}).$$