MA2104 høsten 2007, Øving 12 uke 46: Løsningsforslag til øvingene

Oppgave 5.2.7: Halv-vinkeltrikset er nyttig for å holde gradene til polynomene i sjakk her. Bare husk på formlene $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$. Den siste av disse er nyttig her: Den gir $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$. Sett det inn i det gitte integralet og skift variabel (sett $2\theta = \phi$, og bytt så ϕ tilbake til θ):

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{9 + 16\sin^2\theta} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{17 - 8\cos 2\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{17 - 8\cos\theta}.$$

Nå parametriserer vi enhetssirkelen $C_1(0)$ med $z = e^{i\theta}$, slik at $dz = ie^{i\theta}\,d\theta$, det vil si $d\theta = -i\,dz/z$:

$$I = -\frac{i}{2}\int_{C_1(0)} \frac{dz}{z(17 - 4z - 4z^{-1})} = \frac{i}{8}\int_{C_1(0)} \frac{dz}{z^2 - \frac{17}{4}z + 1}.$$

Vi faktoriserer nevneren i integralet slik:

$$z^2 - \tfrac{17}{4}z + 1 = \bigl(z - \tfrac{17}{8}\bigr)^2 - \tfrac{225}{64} = \bigl(z - \tfrac{17}{8} - \tfrac{15}{8}\bigr)\bigl(z - \tfrac{17}{8} + \tfrac{15}{8}\bigr) = \bigl(z - 4\bigr)\bigl(z - \tfrac{1}{4}\bigr)$$

(Det er ikke hver dag vi støter på det Pytagoreiske triplet $(8, 15, 17)$.)

Bare nullpunktet $z = \frac{1}{4}$ ligger innenfor enhetssirkelen, og residuen der blir

$$\frac{1}{z-4}\bigg|_{z=1/4} = -\frac{4}{15},$$

slik at integralet blir (nå må vi ikke glemme faktoren $i/8$ som vi satte utenfor i sted)

$$2\pi i \cdot \frac{i}{8} \cdot \frac{-4}{15} = \frac{\pi}{15}.$$

Oppgave 5.2.11: Samme fremgangsmåte som over, men nå har vi ikke bruk for halv-vinkeltrikset:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = -i\int_{C_1(0)} \frac{dz}{z(1 + \frac{1}{2}az + \frac{1}{2}az^{-1})} = -\frac{2i}{a}\int_{C_1(0)} \frac{dz}{z^2 + \dfrac{2z}{a} + 1}$$

Nok en gang faktoriserer vi nevneren i integranden:

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{2z}{a} + 1 &= \Bigl(z + \frac{1}{a}\Bigr)^2 + 1 - \frac{1}{a^2} = \Bigl(z + \frac{1}{a}\Bigr)^2 - \frac{1 - a^2}{a^2} \\ &= \Bigl(z + \frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}\Bigr)\Bigl(z + \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\Bigr). \end{aligned}$$

Produktet av de to nullene

$$z_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

er 1, og åpenbart er $|z_-| > 1/|a| > 1$, så $|z_+| < 1$, og z_+ er den eneste polen innenfor enhetssirkelen. Residuen i den polen er

$$\frac{1}{z - z_-}\bigg|_{z=z_+} = \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{a}{2\sqrt{1 - a^2}}.$$

Ikke glem faktoren $-2i/a$ som vi satte utenfor: Det ferdige svaret blir

$$2\pi i \cdot \frac{-2i}{a} \cdot \frac{a}{2\sqrt{1 - a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Oppgave 5.2.13: Halv-vinkeltrikset gir $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$, så vi setter inn det, erstatter 2θ med θ, og merker oss til slutt at integralet er over to perioder, så vi integrerer over en periode istedet og dobler svaret:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos^2\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b\cos 2\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \frac{d\theta}{a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b\cos\theta}$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b\cos\theta}.$$

Nå kunne vi skrive dette som et kurveintegral som før, men det er lettere å skrive om dette integralet litt til, slik at det ligner på integralet vi løste i forrige oppgave! Faktisk er

$$I = \frac{1}{a + \frac{1}{2}b}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + A\cos\theta}, \qquad A = \frac{b}{2a+b}$$

slik at

$$I = \frac{2\pi}{(a+\frac{1}{2}b)\sqrt{1-A^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a(a+b)}}.$$

For at dette skal være gyldig må vi ha $|A| < 1$. Men gitt at a og b er positive, er dette ekvivalent med den gitte betingelsen $b < a$.

Oppgave 8.2.9(a): Fouriersinusrekken til $f(x) = x(1-x)$ på $[0,1]$ er $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$ der

$$b_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,dx = 4\frac{1-(-1)^n}{\pi^3 n^3} = \begin{cases} 0 & n \text{ even,} \\ \dfrac{8}{\pi^3 n^3} & n \text{ odd.} \end{cases}$$

Nå skal også g skrives som en sinusrekke, men $g(x) = \sin\pi x$ er *allerede* en sinusrekke (en kort en), så det er ikke noe mer å gjøre. I tilfelle du insisterer, tenk på det som $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \sin n\pi x$ der $b_1^* = 1$ og alle de andre b_n^* er null.

Nok en gang er alt vi trenger gjøre å skrive opp det endelige svaret som

$$u(x,t) = \sin\pi x \sin\pi t + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k+1)^3}\sin(2k+1)\pi x \cdot \sin(2k+1)\pi t$$

der jeg ssatte leddet som kommer fra g først for å unngå forvirring. Merk at dette leddet naturlig hører sammen med $k=0$-leddet i summen.