MA2104 høsten 2007, Øving 11 uke 45: Løsningsforslag til øvingene

Det er noen tegninger bakerst. Teksten der er på engelsk pga gjenbruk.

Oppgave 5.1.15: Funksjonen har en trippel pol (pol av orden 3) i $z = 1+i$ og en enkel pol i $z = i$. Den sistnevnte er utenfor den gitte integrasjonsveien, så vi trenger bare bekymre oss om den i $z = 1+i$. Den enkleste oppskriften (tror jeg) for å finne residuen i dette tilfellet er (9) på s. 322 i boken, som blir

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\Big(\frac{z+i}{(z-1-i)^3(z-i)}\Big) &= \lim_{z\to 1+i}\frac{1}{2!}\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2\frac{z+i}{z-i}\\ &= \frac{1}{2!}\Big(\frac{d}{dz}\Big)^2\Big(1+\frac{2i}{z-i}\Big)\Big|_{z=1+i} = \frac{2i}{(z-i)^3}\Big|_{z=1+i} = 2i.\end{aligned}$$

(Jeg fikset på uttrykket i annen likhet for å gjøre det lettere å derivere uttrykket to ganger.) Så integralet blir $2\pi i \cdot 2i = -4\pi$.

Oppgave 5.1.20: Integranden har en singularitet i hvert punkt der $e^{\pi z} = -1$, med andre ord der hvor $\pi z = (2k+1)\pi i$, for $k \in \mathbb{Z}$. Bare ett av disse punktene faller innenfor integrasjonsveien: $z = -i$.

Siden den eriverte av nevneren $\pi e^{\pi z}$ ikke har noen nullpunkter, er hvert nullpunkt i nevneren et enkelt nullpunkt, så polene til integranden er alle enkle. Videre er

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{1}{1+e^{\pi z}}, -i\Big) = \frac{1}{d(1+e^{\pi z})/dz}\Big|_{z=-i} = \frac{1}{\pi e^{\pi z}}\Big|_{z=-i} = -\frac{1}{\pi}.$$

Så integralet har verdien $-2\pi i/\pi = -2i$.

Oppgave 5.1.25: Integranden har en pol av orden 5 i $z = 0$. (Nevneren har et nullpunkt av orden 6, men det enkle nullpunktet i telleren reduserer ordenen av polen til $6-1=5$.)

Vi kan derivere $\sin z$ fem ganger, sette $z = 0$ og dividere med $5!$ for å få residuen $(\cos 0)/5! = 1/5!$, så verdien av integralet er $2\pi i/5!$.

Alternativt kan vi bruke den kjente Taylorrekken for $\sin z$:

$$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-5}$$

Koeffisienten foran z^{-1} i denne rekken har $k = 2$, og den gir så residuen i null: Verdien av denne koeffisienten er $(-1)^2/5! = 1/5!$ som før.

Oppgave 7.2.5: (a) Ettersom den gitte funksjonen har jevn (like) symmetri, blir Fourierrekken en ren cosinusrekke. På intervallet $[0,\pi]$ har vi $f(x) = x$, som forenkler integralet noe. Koeffisientene blir

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

og

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\Big[x\sin nx\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\big((-1)^n - 1\big)$$

som er null for like n, slik at koeffisientene ulik null blir

$$a_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)^2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

som gir Fourierrekken gitt i oppgaven.

(b) Funksjonen er kontinuerlig og stykkevis glatt, så Fourierrekken konvergerer uniformt mot funksjonen overalt.

Oppgave 7.2.9: Som i 7.2.5 får vi en cosinusrekke.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

og

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\Big[x^2\sin nx\Big]_0^\pi - \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\sin nx\,dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\Big[x\cos nx\Big]_0^\pi - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \cos nx\,dx = \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2}, \end{aligned}$$

som igjen gir den oppgitte Fourierrekken.

(b) Akkurat som 7.2.5(b).

Oppgave 7.2.17: Vi kan sette inn $x = \pi$ i rekken fra oppgave 7.2.9. Siden $\cos n\pi = (-1)^n$ har vi to faktorer $(-1)^n$ i hvert ledd som kansellerer hverandre, og vi står igjen med

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2},$$

slik at

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\Big(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\Big) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Oppgave 7.5.16: Med $z = e^{i\theta}$ består oppgavn i å finne Laurentrekken til

$$f(z) = \frac{1}{3 + z + z^{-1}} = \frac{z}{z^2 + 3z + 1}$$

gyldig for $|z| = 1$. Vi kan faktorisere nevneren, delbrøkoppspalte, og skrive hver summand i delbrøkoppspaltningen som summen av en geometrisk rekke.

Skal vi ikke omkomme av skrivekrampe før vi er ferdige, må vi sette navn på de to nullpunktene i nevneren: Jeg vil kalle dem $-a_\pm$ (legg merke til minustegnet):

$$a_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{slik at } 0 < a_- < 1 < a_+ \text{ og } a_- a_+ = 1,$$

og

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z + a_-)(z + a_+)} \\ &= \frac{1}{a_+ - a_-}\Big(\frac{a_+}{z + a_+} - \frac{a_-}{z + a_-}\Big) \\ &= \frac{1}{a_+ - a_-}\Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^n}{a_+^n} - \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n a_-^{n+1}}{z^{n+1}}\Big) \\ &= \frac{1}{a_+ - a_-}\sum_{n=-\infty}^\infty (-a_-)^{|n|} z^n \end{aligned}$$

der jeg har utnyttet $a_- a_+ = 1$ for å slå de to summene sammen til en.

Setter vi så $z = e^{i\theta}$ så har vi vist at

$$\frac{1}{3 + e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=-\infty}^\infty \Big(\frac{\sqrt{5} - 3}{2}\Big)^{|n|} e^{i\theta n}.$$

Oppgave 7.5.17: Alt som trengs er å sette inn $z = e^{i\theta}$ i rekken $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ og få

$$e^{e^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!}.$$

Oppgave 8.2.8: Ligningen med $c = 1/\pi$ er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Den vanlige separasjonsmetoden med $u = XT$ gir $XT'' = X''T/\pi^2$, som blir til $X''/X = \pi^2 T''/T$. Begge sider må være konstante.

Nå er lengden av strengen lik 1 og endene er fastholdt, noe som gir randbetingelsene $X(0) = X(1) = 1$. Så den eneste ikketrivielle løsningen for X har formen $X = \cos n\pi x$ with $n = 1, 2, \ldots$. (Rent bortsett fra at jeg kunne multiplisere med en vilkårlig konstant, men den kaster jeg bort siden jeg får en tilsvarende konstant i løsningen for T.)

For T-ligningen finner vi $T'' = -n^2 T$, med løsninger $T = b_n \cos nt + b_n^* \sin nt$. Så ved addisjon ender vi med denne kandidaten til en løsning:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \cdot (b_n \cos nt + b_n^* \sin nt).$$

Initialbetingelsene $u(x,0) = f(x)$ og $\partial u/\partial t(x,0) = g(x)$ blir til

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x = f(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n b_n^* \sin n\pi x = g(x).$$

Sidn $g(x) = 0$ blir $b_n^* = 0$, og koeffisientene b_n må være Fouriersinuskoeffisientene til f:

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx = 2\int_0^1 x \sin \pi x \sin n\pi x \, dx \\ &= \int_0^1 x\big(\cos(n-1)\pi x - \cos(n+1)\pi x\big) \, dx. \end{aligned}$$

En kjapp delvisintegrasjon gir

$$\int_0^1 x \cos m\pi x \, dx = \frac{1}{m\pi}\Big[x \sin m\pi x\Big]_{x=0}^{1} - \frac{1}{m\pi}\int_0^1 \sin m\pi x \, dx = \frac{(-1)^m - 1}{m^2\pi^2}$$

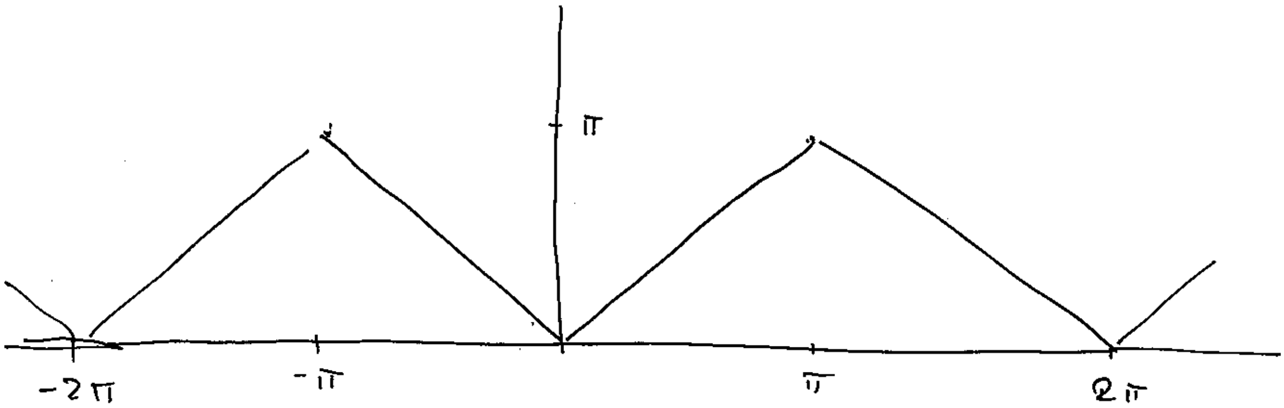
for $m = 1, 2, 3, \ldots$ mens for $m = 0$ er svaret åpenbart $\frac{1}{2}$. Vi setter så dette inn i formelen for b_n og får $b_1 = 1$, $b_n = 0$ for $n = 3, 5, 7, \ldots$ og

$$b_n = -\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = -\frac{8n}{\pi^2(n^2-1)^2}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots$$

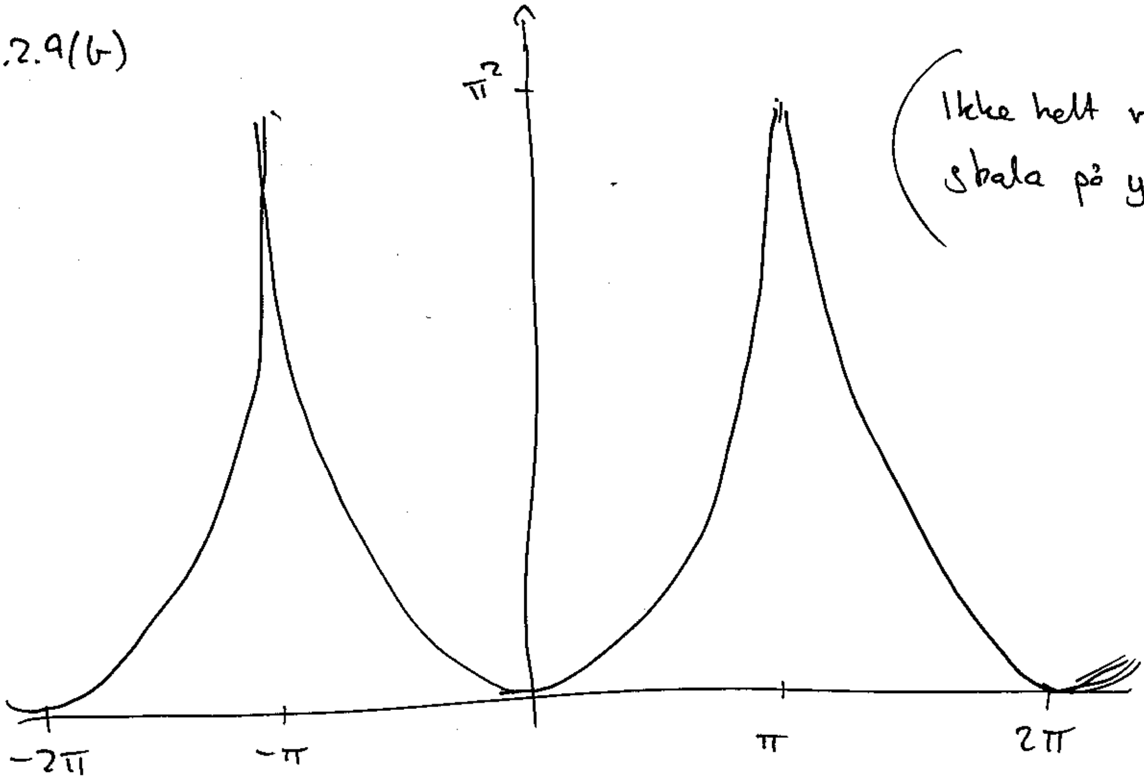
slik at

$$u(x,t) = \sin \pi x \cdot \sin t - \frac{8}{\pi^2}\sum^{\infty} \frac{2k}{\big((2k)^2 - 1\big)^2} \sin n\pi x \cdot \sin nt.$$

7.2.5(b)



7.2.9(b)



(Ikke helt riktig skala på y-aksen.)