MA2104 høsten 2007, Øving 9 uke 43: Løsningsforslag til øvingene

Oppgave 4.4.22: Delbrøkoppspaltingen av det gitte uttrykket er

$$\frac{1}{(z_1-z)(z_2-z)} = \frac{1}{z_1-z_2}\Big(\frac{1}{z_2-z} - \frac{1}{z_1-z}\Big)$$

dersom $|z| < |z_1|$ kan vi skrive

$$\frac{1}{z_1-z} = \frac{1}{z_1}\frac{1}{1-z/z_1} = \frac{1}{z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{z_1}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

og tilsvarende

$$\frac{1}{z_2-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^{n+1}}$$

selvfølgelig, og setter vi det inn i delbrøkoppspaltingen over kan vi slutte oss til at

$$\frac{1}{(z_1-z)(z_2-z)} = \frac{1}{z_1-z_2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z_2^{n+1}} - \frac{1}{z_1^{n+1}}\Big)z^n$$

– jeg aner ikke hvorfor boken bruker en mer komplisert form.

Oppgave 4.4.23: Se etter nullpunktene i nevneren, enten ved å bruke formelen for løsninger av annengradsligningen eller ved å komplettere kvadratet:

$$1+z+z^2 = \big(z+\tfrac{1}{2}\big)^2 + \tfrac{3}{4} = \big(z+\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\big)\big(z+\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\sqrt{3}\big) = (z-z_-)(z-z_+)$$

der

$$z_\pm = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{i}{2}\sqrt{3} = e^{\pm 2\pi i/3}.$$

Så vi får $z_\pm^n = e^{\pm 2n\pi i/3}$ for de to singularitetene til funksjonen.[1] Siden disse har absoluttverdi 1, betyr det at den største disken med sentrum i 0 der funksjonen er analytisk har radius 1. Altså er konvergensradien til Maclaurinrekken 1: Dette kan vi vite uten en gang å regne ut koeffisientene.

Nå kan vi regne ut

$$z_\pm^m = \begin{cases} 1 & m = 3k, \\ z_\pm & m = 3k+1, \\ z_\mp & m = 3k-1, \end{cases}$$

(hvor k er et heltall), slik at

$$z_+^m - z_-^m = \begin{cases} 0 & m = 3k, \\ i\sqrt{3} & m = 3k+1, \\ -i\sqrt{3} & m = 3k-1. \end{cases}$$

Vi får bruk for dette i tilfellet $m = -n-1$ slik at vi kan bruke resultatet fra forrige

[1] Dette virker kjent, og i etterpåklokskapen lys kunne vi ha forkortet regningen ved å merke oss at $(1-z)(1+z+z^2) = 1-z^3$, som har tre nullpunkter på formen $z = e^{2\pi ik/3}$. Av disse kommer den med $k=0$ (altså $z=1$) fra faktoren $1-z$, mens de to andre må komme fra $1+z+z^2$.

oppgave:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+z+z^2} &= \frac{1}{z_- - z_+}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z_+^{n+1}} - \frac{1}{z_-^{n+1}}\right)z^n \\
&= \frac{i}{\sqrt{3}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(z_+^{-3k-1} - z_-^{-3k-1}\right)z^{3k}\right. \\
&\qquad\left. + \sum_{k=0}^{\infty}\left(z_+^{-3k-2} - z_-^{-3k-2}\right)z^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(z_+^{-3k-3} - z_-^{-3k-3}\right)z^{3k+2}\right) \\
&= \frac{i}{\sqrt{3}}\left(-i\sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} + i\sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty} z^{3k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} - \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k+1}
\end{aligned}
$$

som nesten virker for enkelt til å være sant. Men vi kan ledd addere summen av disse to geometriske rekkene for å sjekke resultatet:

$$
\sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} - \sum_{k=0}^{\infty} z^{3k+1} = \frac{1}{1-z^3} - \frac{z}{1-z^3} = \frac{1-z}{1-z^3} = \frac{1}{1+z+z^2}
$$

Hadde vi vært smartere kunne vi selvsagt ha gjort dette siste regnestykket i revers og sluppet unna en lang regning.[2]

Oppgave 4.5.1: For $|z| > 1$:

$$
\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+z^{-2}} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-2k}.
$$

Oppgave 4.5.13: Vi har delbrøksoppspaltingen

$$
\frac{z}{(z+2)(z+3)} = \frac{z}{z+2} - \frac{z}{z+3}.
$$

Siden $2 < |z| < 3$ må vi håndtere de to brøkene på forskjellig vis slik at den største summanden i nevneren kommer på utsiden i hvert tilfelle (men jeg gjør dem i parallell her):

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{(z+2)(z+3)} = \frac{z}{z+2} - \frac{z}{z+3} &= \frac{1}{1+2/z} - \frac{z}{3}\frac{1}{1+z/3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{z}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}.
\end{aligned}
$$

der den første summen er den singulære delen, og den andre den regulære delen, av Laurentrekken (jeg flyttet leddet for $n = 0$ fra den ene rekken til den andre for å gjøre det klarere).

Oppgave 4.5.25: Det er bare å sette inn $1/z$ i stedet for z i den vanlige Taylorrekken for $\sin z$, som gir

$$
\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!z^{2k+1}}
$$

Leddet med $1/z$ er det med $k = 0$, og det ledde har den enkle formen $1/z$. Så integralet rundt $C_1(0)$ er $2\pi i$.

[2]Her ligger en enkel lærdom begravd: Iblant vil folk oppdage slike enkle sammenhenger etter å ha begått en lang utregning og fått et overraskende enkelt svar, hvorpå de så bare presenterer den raske veien til målet. Resultatet kan virke ganske magisk.

Oppgave 7.1.8: (a) Vi er gitt $f(x) = \cos x + \cos \pi x$ og blir bedt om å vise at ligningen $f(x) = 2$ bare har en løsning. (Åpenbart menes det bare en *reell* løsning. Jeg er nokså sikker på at det er mange komplekse løsninger, men jeg har ikke regnet etter.) Siden $\cos x \leq 1$ og $\cos \pi x \leq 1$ så er summen alltid ≤ 2, med likhet hvis og bare hvis begge summandene er lik 1. Fra $\cos x = 1$ får vi $x = m\pi$ med $m \in \mathbb{Z}$, og fra $\cos \pi x = 1$ får vi $\pi x = n\pi$ med $n \in \mathbb{Z}$. Deler vi de to formlene på hverandre får vi $\pi = n/m$, som er en motsigelse fordi π er irrasjonal. Divisjonen går ikke i spesialtilfellet $x = 0$, som åpenbart *er* en løsning og derfor den *eneste* løsningen.

(b) Om f var periodisk med periode T, ville vi ha $f(nT) = 2$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ fordi $f(0) = 2$.

Oppgave 7.1.12: Ettersom integralet er over en hel periode kan vi flytte integrasjons-intervallet dit vi vil, slik at

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

Oppgave 7.1.15: Hvis f og $F(x) = \int_a^x dx$ er 2π-periodiske, så er $F(a+2\pi) = F(a) = 0$, slik at $\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = 0$. Da er også $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ (vi kan flytte intervallet igjen).

Omvendt, dersom $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ så er nok en gang fra et intervallskifte

$$F(a+2\pi) - F(a) = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$$

for alle a, slik at F må være 2π-periodisk.

Generelt, om $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = b$ så er $F(x + 2n\pi) = F(x) + nb$ hver gang $n \in \mathbb{Z}$, så F vokser grovt regnet lineært. Mer presist, så er $F(x)$ summen av bx og en 2π-periodisk funksjon.

Fresnelintegralene:

Ettersom funksjonen e^{-z^2} er hel, er integralet av den rundt enhver lukket vei null ved Cauchys integralteorem.

For den gitte trekantveien $[0, M, M+iM, 0]$ kan det være kjekt å ta integralet langs hypotenusen fra origo og oppover, som er motsatt av hva veien krever. Så vi kan skrive

$$\underbrace{\int_{[0,M]} e^{-z^2}\,dz}_{A(M)} + \underbrace{\int_{[M,M+iM]} e^{-z^2}\,dz}_{B(M)} - \underbrace{\int_{[0,M+iM]} e^{-z^2}\,dz}_{C(M)} = 0. \tag{1}$$

Vi tar ett ledd om gangen, og starter med

$$A(M) = \int_0^M e^{-x^2}\,dx \to \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{as } M \to +\infty. \tag{2}$$

For neste ledd bruker vi parametriseringen av $M, M+iM$ gitt ved $z = M + iy$ der $0 \leq y \leq M$ og finner

$$B(M) = i\int_0^M e^{-(M+iy)^2}\,dy = i\int_0^M e^{-M^2+y^2+2iMy}\,dy$$

slik at

$$\bigl|B(M)\bigr| \leq \int_0^M |e^{-M^2+y^2+2iMy}|\,dy = \int_0^M e^{-M^2+y^2}\,dy = \int_0^M e^{(y+M)(y-M)}\,dy.$$

I integrasjonsintervallet er $y - M \leq 0$ og $y + M \geq M$, så $(y+M)(y-M) \leq M(y-M)$ og derfor

$$\bigl|B(M)\bigr| \leq \int_0^M e^{M(y-M)}\,dy = \frac{1-e^{-M^2}}{M} < \frac{1}{M}$$

slik at

$$B(M) \to 0 \qquad \text{når } M \to +\infty. \tag{3}$$

Kombinasjonen av ligningene (1), (2) og (3) gir at

$$C(M) \to \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{når } M \to +\infty. \tag{4}$$

Til sist integrerer vi langs hypotenusen $[0, M + iM]$ ved å sette $z = (x + ix)/\sqrt{2}$ for $0 \leq x \leq \sqrt{2}M$, slik at $dz = (1 + i)/\sqrt{2}dx$, og $z^2 = -x^2$ (som er grunnen til å dividere med $\sqrt{2}$ – det sparer et variabelskift senere)

$$C(M) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^M e^{-ix^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^M (\cos x^2 + \sin x^2)\,dx + \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^M (\cos x^2 - \sin x^2)\,dx.$$

Men ligning (4) forteller at dette har en reell grense når $M \to \infty$, så imaginardelen av det ovenstående – det vil si det siste integralet – må gå mot null, mens realdelen – det nest siste integralet – må konvergere mot høyresiden av (4). Fra den første av disse to konklusjonene får vi

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx,$$

og setter vi så dette inn i den andre, får vi

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\cos x^2 + \sin x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(De endelige versjonene av disse integralene er kjent som *Fresnelintegraler*. Sammen parametriserer de den såkalte *Cornuspiralen*.)