MA2104 høsten 2007, Øving 8 uke 42: Løsningsforslag til øvingene

Oppgave 4.2.1:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0, \qquad 0 < x < \pi$$

fordi $|(\sin nx)/n| \le 1/n \to 0$. Dette viser også at konvergensen er uniform, fordi $1/n$ er uavhengig av x.

Med fare for å være overdrevent pedantisk: Gitt $\epsilon > 0$, velg N slik at $1/n < \epsilon$ når $n \ge N$. Da viser ulikheten over at $|f_n(x)| < \epsilon$ for alle x, når $n \ge N$. Dette er presis hva som menes med uniform konvergens til null.

Oppgave 4.2.2:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{nx} = 0, \qquad 0 < x < \pi$$

fordi $|(\sin nx)/n| \le 1/(nx) \to 0$ for enhver $x > 0$.

Men ettersom estimatet $1/(nx)$ ikke er uavhengig av x, kan vi ikke konkludere at konvergensen er uniform. Vi kan heller ikke (ennå) konkludere at den *ikke* er uniform, for det kunne tenkes at vi kan klare å finne et bedre estimat som gir oss det vi trenger. Men konvergensen *er* faktisk ikke uniform: En grei måte å se dette på er å merke seg at

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin nx}{nx} = 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Spesielt betyr det at for enhver n finnes en x (nær 0) som er slik at $f_n(x) \ge \frac{1}{2}$.

Men dersom $f_n(x) \to 0$ uniformt, skulle det finnes en N slik at (sett $\epsilon = \frac{1}{2}$ i definisjonen av uniform konvergens) $f_n(x) < \frac{1}{2}$ for hver x og hver $n \ge N$. Dette er åpenbart i motstrid med hva vi nettopp fant.

En annen måte å se det på er å se etter steder der $f_n(x)$ er stor. Gitt et naturlig tall n kan vi velge x ved å sette $nx = \pi/2$. Da er $f_n(x) = 2/\pi$. Dette motsier nok en gang definisjonen av uniform konvergens mot null, denne gangen med $\epsilon = 2/\pi$.

Til slutt blir vi bedt om å finne et passende intervall der følgen konvergerer uniformt. Siden problemene med uniform konvergens oppstår nær 0, virker det rimelig å utelukke små verdier av x. I starten av oppgaven fant vi estimatet $|f_n(x)| \le 1/(nx)$. Hvis vi velger en vilkårlig $\delta > 0$ og bare betrakter $x \ge \delta$, så gir estimatet ulikheten $|f_n(x)| \le 1/(n\delta)$ som *er* uavhengig av x, og åpenbart vil $1/(n\delta) \to 0$ når $n \to \infty$, så vi har uniform konvergens mot 0 på $[\delta, \infty)$ for enhver $\delta > 0$.

Oppgave 4.2.13: Vi finner

$$\Big|\frac{z^n}{n(n+1)}\Big| < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad |z| \le 1.$$

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 < \infty$$

(dette er en *teleskoprekke*), så Weierstraß's M-test viser at den gitte rekken konvergerer uniformt på den gitte mengden.

Alternativt kan man bruke ulikheten

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

og det faktum at $\sum n^{-2}$ er endelig, (noe som vel er kjent, eller følger fra integraltesten). (Faktisk er den sistnevnte summen $\pi^2/6$, som følger fra teorien om Fourierrekker.)

Oppgave 4.2.18: For å finne en god øvre grense for $|1/(5-z)^n|$ trenger vi en nedre grense for $|(5-z)^n|$, og dermed for $|5-z|$. Vi har gitt at $|z| \le \frac{7}{2}$, så vi bruker $|5-z| \ge 5-|z| \ge 5-\frac{7}{2} = \frac{3}{2}$. Dermed blir $|(5-z)^n| \ge \left(\frac{3}{2}\right)^n$, så $|(5-z)^{-n}| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$, og vi er ferdige siden $\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1/(1-\frac{2}{3}) = 3 < \infty$.

Oppgave 4.2.25: (a) Ja, siden $|z-\frac{1}{2}| < \frac{1}{6}$ impliserer $|z| = |z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}| \le |z-\frac{1}{2}| + |\frac{1}{2}| < \frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ slik at $|z^n| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ og $\sum\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1/(1-\frac{2}{3}) = 3 < \infty$.

(b) Hvis vi forsøker å gjenta suksessen fra (a) så får vi ikke til noe bedre estimat enn $|z| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, og beviset fungerer ikke. Under betingelsen $|z-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ kan vi få z til æ være så snær 1 som vi måtte ønske, og dette ser ut til å komme i veien for uniform konvergens.

I dette tilfelle er vi så heldige at vi kan regne helt eksplisitt: Forskjellen mellom grensen og en delsum er halen

$$\sum_{n=N}^{\infty} z^n = \frac{z^{N+1}}{1-z} \to \infty \qquad \text{når } z \to 1,$$

men hvis vi hadde uniform konvergens skulle disse halene bli uniformt små for alle z når N blir stor. Så rekken er ikke uniformt konvergent på området $|z-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$.

Oppgave 4.3.1: Forholdet mellom absoluttverdiene til ledd $n+1$ og ledd n i rekken er

$$\frac{2n+3}{2n+1}|z| \to |z| \quad \text{når } n \to \infty,$$

så rekken konvergerer for $|z| < 1$ og divergerer for $|z| > 1$. Med andre ord er konvergensradien 1. Konvergensdisken er gitt ved $|z| < 1$ og konvergenssirkelen (randen til konvergensdisken) ved $|z| = 1$. (Merk at det ikke spørres om konvergens for z på konvergenssirkelen her og i de andre oppgavene.)

Oppgave 4.3.2: Forholdet mellom absoluttverdiene til ledd $n+1$ og ledd n i rekken er

$$\frac{(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!n!}|z| = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)}|z| \to 0 \quad \text{når } n \to \infty,$$

så konvergensradien er uendelig. Da får vi vel si at konvergensdisken er hele det komplekse planet, og «konvergenssirkelen» blir tom, eller kanskje vi kan si $\{\infty\}$? (Jeg tror ikke det finnes noen standard konvensjon her.)

Oppgave 4.3.7: Forholdet mellom absoluttverdiene til ledd $n+1$ og ledd n i rekken er

$$\frac{|n+1+i|^4}{|n+i|^4}|z+6| \to |z+6| \quad \text{når } n \to \infty,$$

så vi har konvergens for $|z+6| < 1$ og divergens for $|z+6| > 1$. Konvergensradien er 1, konvergensdisken er gitt ved $|z+6| < 1$ og konvergenssirkelen er $|z+6| = 1$.

Oppgave 4.3.12: Vi finner

$$\sqrt[n]{|(2+2i^n)^n|} = |2+2i^n|.$$

For $n = 1, 2, 3, 4$ er $2+2i^n$ lik henholdsvs $2+2i$, 0, $2-2i$, 4. Dette gjentar seg for $n = 5, 6, 7, \ldots$. Absoluttverdien er størst (og lik 4) for $n = 4, 8, 12, \ldots$, så $\limsup|2+2i^n| = 4$. Konvergensradien blir $\frac{1}{4}$, konvergensdisken er gitt ved $|z| < \frac{1}{4}$ og konvergenssirkelen ved $|z| = \frac{1}{4}$.

Oppgave 4.4.21: Vi finner

$$\Big|\frac{(z-2)^n}{3^n}\Big| \leq \Big|\frac{2.9^n}{3^n}\Big| \quad \text{and} \quad \Big|\frac{2^n}{(z-2)^n}\Big| \leq \Big|\frac{2^n}{2.01^n}\Big|,$$

så

$$\Big|\frac{(z-2)^n}{3^n} + \frac{2^n}{(z-2)^n}\Big| \leq \Big(\frac{2.9}{3}\Big)^n + \Big(\frac{2}{2.01}\Big)^n,$$

og

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bigg(\Big(\frac{2.9}{3}\Big)^n + \Big(\frac{2}{2.01}\Big)^n\bigg) = 231 < \infty$$

(ikke at vi virkelig trengte den eksakte summen), og vi er ferdig.