MA2104 høsten 2007, Øving 7 uke 41: Løsningsforslag til øvingene

Oppgave 3.7.14: Fra antagelsen $\lim_{z\to\infty}|f(z)| = c$ finner vi (ved å bruke $\epsilon = 1$ i definisjonen av grense) en M slik at $\big||f(z)| - c\big| < 1$ for $|z| > M$. For slike z blir da $|f(z)| < c + 1$ (som vi tolker som «$f(z)$ er begrenset nær uendelig»).

På den annen side er mengden $\{z\colon |z| \le M\}$ kompakt (lukket og begrenset), så den kontinuerlige funksjonen f er begrenset på denne mengden, la oss si $|f(z)| \le C$ når $|z| \le M$.

Da er i alle tilfeller $|f(z)| \le \max(C, c + 1)$.

Oppgave 3.7.15: Anta at f er hel og $f(z) \to 0$ når $z \to \infty$. Det følger fra oppgave 3.7.14 at f er begrenset. Ved Liouvilles teorem er den derfor konstant: La oss si $f(z) = C$ for alle $z \in \mathbb{C}$. Lar vi $z \to \infty$ må vi konkludere at $C = 0$.

Oppgave 3.7.19: Vi antar at f er hel og $f(z)/z \to 0$ at $z \to \infty$. Vi blir bedt om å vise at f er konstant.

Dette virker *sterkere* enn Liouvilles teorem, siden antagelsen er *svakere* enn antagelsen i Liouvilles teorem. Vi kunne for eksempel tenke oss en funksjon f slik at $|f(z)|$ er tilnærmet lik $|z|^{1/2}$ for store $|z|$. Men i følge resultatet vi skal vise kan ikke en slik fnksjon eksistere. Resultatet er også skarpt, som eksemplet $f(z) = z$ viser. (Vi sier at et resultat er skarpt dersom konklusjonen ikke lenger holder hvis vi bare svekker antagelsen litt.)

Første bevis: Bruk den generaliserte Cauchyformelen

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

der γ er en lukket vei rundt z. Velg $\gamma = C_R(0)$. Gitt $\epsilon > 0$ kan vi finne M slik at $|f(z)/z| < \epsilon$ når $|z| > M$.

Hvis $R > \max(M, |z|)$ så er $|f(\zeta)| < \epsilon|\zeta| = \epsilon R$ og $|\zeta - z|^2 > (R - |z|)^2$ for hver ζ på $C_R(0)$. Lengden av integrasjonsveien $C_R(0)$ er $2\pi R$. Alt i alt kan vi estimere integralet slik:

$$|f'(z)| < \frac{2\pi R}{|2\pi i|}\frac{\epsilon R}{(R - |z|)^2} = \frac{\epsilon R^2}{(R - |z|)^2} < 4\epsilon$$

der vi velger $R > 2|z|$ for å få til den siste ulikheten. Siden $\epsilon > 0$ var vilkårlig, må $f'(z) = 0$. Og siden dette holder for alle z, er f konstant.

Andre bevis: Husk (Theorem 4, s. 206) at funksjonen $g(z) = \big(f(z) - f(0)\big)/z$ er analytisk i $z = 0$, så lenge du definerer $g(0) = f'(0)$. Men g er åpenbart analytisk alle andre steder i tillegg, så den er hel. Det følger fra antagelsen at $g(z) = f(z)/z - f(0)/z \to 0$ når $z \to \infty$. Oppgave 3.7.15 viser at $g(z) = 0$ for alle z. Derfor er f konstant.

Oppgave 3.7.20: Akkurat som i det andre beviset for oppgave 3.7.19, er

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

hel og begrenset, og derfor konstant. Ettersom $g(z) \to c$ når $z \to \infty$, må denne konstanten være lik c. Løser vi ligningen $\big(f(z) - f(0)\big)/z = c$ for $f(z)$ får vi den ønskede formelen, med $b = f(0)$.

Løsninger til oppgavene fra 4.2 utstår til neste løsningsforslag.