MA2104 høsten 2007, Øving 6 uke 40: Løsningsforslag til øvingene

Oppgave 3.6.1: Cauchys formel for cosinus, anvendt på den lukkede veien $C_1(0)$ og punktet $z = 0$, på innsiden av denne veien:

$$\cos 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{\cos\zeta}{\zeta - 0}\,d\zeta.$$

Dette er i orden fordi cosinus-funksjonen er en hel funksjon, slik at den i hvert fall er analytisk på og innenfor $C_1(0)$. Multipliser med $2\pi i$ og skift navn på integrasjonsvariabelen og få

$$\int_{C_1(0)} \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi i.$$

(Dette var alt for detaljert; i de neste oppgavene skal jeg regne med at slike trivialiter som å skifte navn på integrasjonsvariablene ikke forårsaker unødig hodebry.)

Oppgave 3.6.2: Vi bruker Cauchys på punktet i, som ligger innenfor $C_3(0)$, anvendt på funksjonen $f(z) = e^{z^2}\cos z$:

$$\int_{C_3(0)} \frac{e^{z^2}\cos z}{z - i}\,dz = 2\pi i e^{i^2}\cos i = 2\pi i e^{-1}\frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = 2\pi i e^{-2}.$$

Oppgave 3.6.3: Faktoriser nevneren i integranden. Finn nullpunktene til nevneren ved å bruke formelen for annengradsligninger, eller kompletter kvadratet: $z^2 - 5z + 4 = (z - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4} = (z - \frac{5}{2} + \frac{3}{2})(z - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}) = (z-1)(z-4)$. Det første av de to nullpunktene $z = 1$ og $z = 4$ ligger innenfor sirkelen $C_2(1)$, og de andre på utsiden: Så integralet kan ses på som Cauchys integralformel anvendt på funksjonen $f(z) = 1/(z-4)$ og punktet $z = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2(1)} \frac{1}{z^2 - 5z + 4}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2(1)} \frac{1}{(z-1)(z-4)}\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2(1)} \frac{1/(z-4)}{z-1}\,dz = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Oppgave 3.6.17: We vil gjerne faktorisere nevneren her og. Denne gangen er den et tredjegradspolynom med faktorisering

$$z^3 - 3z + 2 = (z-1)^2(z+2).$$

Vi kunne funnet ut det ved å se etter en rasjonal root: Hvis polynomet har en, så må roten være et heltall (siden nevneren i roten går opp i den ledende koeffisienten i polynomet), og det heltallet må gå opp i konstantleddet 2. Så de fire tallene ± 1 og ± 2 er de eneste mulige rasjonale røtter. Vi prøver dem alle, og finner at de rasjonale røttene er $z = 1$ og $z = -2$. Enten polynomdivisjon eller oppdagelsen at $z = 1$ må være en dobbel rot fordi den også er en rot til den deriverte $3z^2 - 3$ fullfører faktoriseringen.

Deretter undersøker vi hvordan røttene $z = 1$ og $z = -2$ ligger i forhold til integrasjonsveien $C_{3/2}(0)$: Åpenbart er $z = 1$ innenfor $z = -2$ utenfor. Så dette vil se ut som Cauchys integralformel anvendt på den *deriverte* av funksjonen $f(z) = 1/(z+2)$:

$$\begin{aligned}\int_{C_{3/2}(0)} \frac{1}{z^3 - 3z + 2}\,dz &= \int_{C_{3/2}(0)} \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}\,dz = \int_{C_{3/2}(0)} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz \\ &= \frac{2\pi i}{1!}f'(1) = -\frac{2\pi i}{(z+2)^2}\bigg|_{z=1} = -\frac{2\pi i}{9}.\end{aligned}$$

Oppgave 3.6.20: Her får vi faktoriseringen $(z^4 - 1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$, men siden alle nullpunktene ligger innenfor integrasjonsveien $C_2(0)$ kan vi ikke bruke teknikken fra de forrige to oppgavene.

Så vi bruker delbrøkoppspalting istedet. (*Merk: Dette kunne vi gjort i oppgavene 3.6.3 og 3.6.17 også.*)

Hvis vi husker så langt tilbake som til oppgave 3.4.33, så kan vi se med en gang at svaret må være null! Men vi kan verifisere det ved å regne ut koeffisientene i delbrøkoppspaltingen

$$\frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-i} + \frac{D}{z+i}.$$

Vi kan spare litt arbeid ved å gjøre det i to trinn: Sett $z^2 = w$ og merk at

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^4-1} &= \frac{1}{w^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{w-1} - \frac{1}{w+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z^2-1} - \frac{1}{z^2+1}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} + \frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i}\Big)\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}\int_{C_2(0)} \frac{1}{z^4-1}\,dz &= \frac{1}{4}\int_{C_2(0)} \Big(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} + \frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i}\Big)\,dz \\ &= \frac{2\pi i}{4}(1 - 1 + i - i) = 0.\end{aligned}$$

Oppgave 3.6.21: (a) Integranden er en analytisk funksjon av z for z i enhetsdisken, og den er kontinuerlig som funksjon av z og t. Så integralet er også analytisk.

(b) Med $\gamma(t) = \zeta = e^{it}$ finner vi $d\zeta = ie^{it}\,dt$, og vi gjenkjenner det gitte integralet som et kurveintegral:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = 1$$

Oppgave 3.6.28: (a) Dette er bare Cauchys integralformel for eksponensialfunksjonen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1(0)} \frac{e^z}{z}\,dz = e^0 = 1.$$

(b) Med samme parametrisering som i oppgave 3.6.21, altså $\gamma(t) = z = e^{it}$, kan vi skrive dette som

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{it}}e^{it}}{e^{it}}\,dt = 1, \quad \text{som forenkles til} \quad \int_0^{2\pi} e^{e^{it}}\,dt = 2\pi.$$

Deretter,

$$e^{e^{it}} = e^{\cos t + i\sin t} = e^{\cos t}(\cos\sin t + i\sin\sin t),$$

som vi setter inn i formelen over. Funksjonene vi integrerer er periodiske med periode 2π. Så vi kan bytte ut integrasjonsgrensene også:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t}(\cos\sin t + i\sin\sin t)\,dt = 2\pi.$$

Leddet $e^{\cos t}\sin\sin t$ er en odde funksjon av t, så integralet av det blir null. Leddet $e^{\cos t}\cos\sin t$ er en like (jevn) funksjon av t, så integralet av det blir to ganger integralet fra 0 til π, og vi har kommet frem til den ønskede konklusjonen

$$\int_0^{\pi} e^{\cos t}\cos\sin t\,dt = \pi.$$

Oppgave 3.6.31: Delbøksoppspalting:

$$\frac{1}{(\zeta - z)\zeta} = \frac{1}{z}\Big(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}\Big),$$

sett inn i integralet, og bruk Cauchys integralformel to ganger.

Oppgave 3.7.3: $f(z) = e^{-z^2}$ er analytisk, så $|f(z)|$ må oppnå sitt maksimum og minimum på randen, siden vi betrakter et begrenset område. For denne bruken av minimumsprinsippet trenger vi også vite at $f(z) \neq 0$ i området. Randen her er unionen av de to sirklene $|z| = 1$ og $|z| = 2$. Vi merker oss også at $|e^{-z^2}| = e^{-\operatorname{Re} z^2} = e^{y^2 - x^2}$, som er maksimalt på en sirkel $x^2 + y^0 =$ konstant der hvor $x = 0$, og minimal der $y = 0$. (En grei måte å se dette på er at $x^2 + y^2 = r^2$ gir $e^{y^2-x^2} = e^{r^2-2x^2} = e^{2y^2-r^2}$.) De mest ekstreme verdiene i begge retninger er på den ytre sirkelen $|z| = 2$, med maksimumsverdien e^4 i $z = \pm 2i$ og minimumsverdien e^{-4} i $z = \pm 2$.

Det burde ikke overraske oss at ekstremverdiene skjer på den *ytre* siden f er analytisk ikke bare i annulusen, men i hele disken $|z| \leq 2$.

Oppgave 3.7.9: Vi finner $|\operatorname{Ln} z| = |\ln|z| + i \operatorname{Arg} z| = \sqrt{(\ln|z|)^2 + (\operatorname{Arg} z)^2}$, så man trenger ikke mye teori for å oppdage at maksimumsverdien opptrer der både $|z|$ og $|\operatorname{Arg} z|$ er maksimale, mens minimumsverdien opptrer der de begge er minimale. (For å gjøre det klart så er det *fasongen* på området som gjør at vi kan maksimere eller minimere begge disse størrelsene i samme punkt.) Så maksimumsverdien $\sqrt{(\ln 2)^2 + (\frac{\pi}{4})^2}$ opptrer i $z = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1+i)$, og minimumsverdien 0 opptrer i $z = 1$.

Oppgave 3.7.11: Merk at $|e^{e^z}| = e^{\operatorname{Re} e^z} = e^{e^{\operatorname{Re} z} \cos \operatorname{Im} z} = e^0 = 1$ når $\operatorname{Im} z = \pm\frac{\pi}{2}$. Men i midten av stripen er z reell, så e^z er reell og går mot uendelig når $z \to +\infty$, og da vil også $e^{e^z} \to +\infty$. Så denne funksjonen er i høyeste grad ubegrenset i stripen, enda den er begrenset (med konstantverdien 1) på randen. Dette motsier ikke maksimum modulus-prinsippet fordi området er ubegrenset.