MA2104 høsten 2007, Øving 5 uke 39: Løsningsforslag til øvingene

Det er noen tegninger bakerst. Teksten der er på engelsk pga gjenbruk.

Oppgave 3.3.18: En antiderivert for integranden er $\frac{1}{3}(z-2-i)^3 + i\ln(z-2-i) + 3(z-2-i)^{-1}$. Hvis vi velger den grenen av logaritmen som er slik at $0 \le \arg z < 2\pi$, så er dette definert for alle z unntatt der $z-2-i$ er reell og ≥ 0. Med andre ord, overalt unntatt på halvlinjen $\{2+i+t\colon t \in [0,\infty]\}$, som ikke skjærer integrasjonsveien $C_1(0)$. Siden veien er lukket, er dermed integralet null. (Prinsipalgrenen av logaritmen ville ikke virket her fordi den resulterende forgreningslinjen («branch cut») for leddet $\ln(z-2-i)$ ville bli halflinjen $\{2+i-t\colon t \in [0,\infty]\}$, som berører integrasjonsveien i ett punkt.)

Oppgave 3.3.19: Ved delvis integrasjon finner vi en antiderivert for ze^z til å være $(z-1)e^z$ (trivielt å verifisere ved derivasjon). Dette holder for alle z, så vi finner umiddelbart

$$\int_{[z_1,z_2,z_3]} ze^z\,dz = \Big[(z-1)e^z\Big]_{\pi}^{-1-i\pi} = (-2-i\pi)e^{-1-i\pi} - (\pi-1)e^{\pi} = (2+i\pi)e^{-1} - (\pi-1)e^{\pi}.$$

Oppgave 3.3.27: (a)

$$\frac{d}{dz}z^\alpha = \frac{d}{dz}e^{\alpha\ln z} = \frac{\alpha}{z}e^{\alpha\ln z} = \alpha e^{\alpha\ln z}e^{-\ln z} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln z} = \alpha z^{\alpha-1}$$

så lenge vi bruker samme gren av logaritmen hele veien. Erstatter vi α med $\alpha+1$ og dividerer med $\alpha+1$, finner vi

$$\frac{d}{dz}\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} = z^\alpha, \qquad \text{for } \alpha \ne -1.$$

(b) Bruker vi prinsipalgrenen av logaritmen kan vi merke oss at den gitte veien γ ikke kommer borti forgreningslinjen (den negative reelle halvaksen), så vi kan skrive

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = \int_\gamma z^{-1/2}\,dz = \Big[2z^{1/2}\Big]_{e^{-i\pi/2}}^{e^{i\pi/2}} = 2(e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}) = 4i\sin\tfrac{\pi}{4} = 2i\sqrt{2}.$$

Oppgave 3.3.29: (a) Anta at $|z_0| > R$. Ordvalget i oppgaven er litt vrient: Det som menes er nok at $C_R(z_0)$ ikke kan skjære alle fire halvaksene $\{x\colon x \in [0,\infty]\}$, $\{x\colon x \in [-\infty,0]\}$, $\{iy\colon y \in [0,\infty]\}$, $\{iy\colon y \in [-\infty,0]\}$. Den kan ikke en gang skjære begge de to første (de reelle halvaksene). (Kjapt bevis: Den lukkede disken $\bar{B}_R(z_0)$ er konveks. Dersom den inneholder punktene $x_1 \in [0,\infty]$ og $x_2 \in [-\infty,0]$ så inneholder den 0, siden 0 ligger på linjestykket mellom x_1 og x_2. Men $0 \notin B_R(z_0)$ siden $|z_0| > R$.) Så vi kan bruke an av de to reell halvaksene som forgrening, altså enten $[-\infty,0]$ (som gir prinsipalgrenen av logaritmen) eller $[0,\infty]$ (som gir grenen definert ved å bruke argumentvinkelen i $[0,2\pi)$ – dette er grenen som kalles $\log_0$ i boken, og som vi derfor kan kalle $\ln_0$) slik at det finnes en gren av $\ln z$ som er analytisk på $C_R(z_0)$; og denne er selvsagt en antiderivert for $1/z$. Siden veien er lukket, er integralet null.

(b) Anta $|z_0| < R$. Lærebokforfatteren har virkelig oppgitt så store deler av beviset at det knapt er noe å legge til, annet enn at en antiderivert til $1/z$ langs γ_1 er prinsipalgrenen av logaritmen, og en antiderivert langs γ_2 er grenen vi kalte $\ln_0$. Så

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= \int_{\gamma_1}\frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2}\frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2 + \ln_0 z_2 - \ln_0 z_1 \\ &= \ln|z_1| + \tfrac{\pi i}{2} - (\ln|z_2| - \tfrac{\pi i}{2}) + \ln|z_2| + \tfrac{3\pi i}{2} - (\ln|z_1| - \tfrac{\pi i}{2}) = 2\pi i.\end{aligned}$$

Oppgave 3.3.32: Svaret er selvsagt $2\pi i$, som vi kan se ved å bruke Cauchys integralteorem. (Men det er litt juks, siden vi ikke hadde hatt dette teoremet ennå.) Men vi kan følge presis samme prosedyre som i 3.3.29, ord for ord som beskrevet ovenfor.

Oppgave 3.3.35: (a) Med notasjon som brukt i oppgaven: når $t \to t_0$ så vil $\gamma(t) \to \gamma(t_0) = z_0$, slik at $\epsilon(\gamma(t)) \to 0$.

(b) Identiten som skal vises er en enkel konsekvens av å erstatte z i $F(z) = F(z_0) + F'(z_0)(z - z_0) + \epsilon_1(z)(z - z_0)$ med $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + \epsilon_2(t)(t - t_0)$, og z_0 med $\gamma(t_0)$. Resultatet kan best reorganiseres slik:

$$
\begin{aligned}
F(\gamma(t)) = F(\gamma(t_0)) + \overbrace{F'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)}^{A}(t - t_0) \\
+ \underbrace{\left(\epsilon_1(\gamma(t))\gamma'(t_0) + \epsilon_1(\gamma(t))\epsilon_2(t) + F'(\gamma(t_0))\epsilon_2(t)\right)}_{\epsilon(t)}(t - t_0)
\end{aligned}
$$

der $\epsilon(t) \to 0$ når $t \to t_0$, slik at leddet merket A må være den deriverte av $F(\gamma(t))$ i $t = t_0$.

Oppgave 3.4.1: Ja: Krymp γ_0 til et punkt, flytt dette punktet langs en vei til γ_1, utvid dette punktet γ_1.

Oppgave 3.4.2: Nei: γ_0 går rundt to huller i området, noe γ_1 ikke gjør.

Oppgave 3.4.3: Nei: Det er et hull i veien. (Fasiten bak i boken er feil.)

Oppgave 3.4.4: Ja: Dette er visuelt nokså opplagt. Det er ingen huller i veien.

Oppgave 3.4.5: Ja: Området er konvekst. Som alltid i et konvekst område, kan vi skrive en homotopi eksplisitt på formen $H(t, s) = s\gamma_1(t) + (1 - s)\gamma_0(t)$.

Oppgave 3.4.6: Nei: De to veiene går rundt samme hull, men i motsatt retning.

Oppgave 3.4.10: Området i figure 36 er konvekst, de andre er det ikke. Se bildet bakerst.

Oppgave 3.4.17: Integrasjonsveien er $C_1(i)$ og integranden er analytisk i $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Siden integranden er lukket og $-i$ ligger på utsiden av det, og integranden er analytisk, er integralet null.

Oppgave 3.4.29: Kanskje det enkleste er en delbrøksoppspalting av integralet? Skriv

$$
\frac{1}{(z+1)^2(z^2+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{C}{z+i} + \frac{D}{z-i}
$$

og multipliser med fellesnevneren:

$$
\begin{aligned}
1 &= A(z+1)(z^2+1) + B(z^2+1) + C(z+i)(z+1)^2 + D(z-i)(z+1)^2 \\
&= (A + C + D)z^3 + (A + B + (2+i)C + (2-i)D)z^2 \\
&\qquad + (A + (1+2i)C + (1-2i)D)z + A + B + iC - iD,
\end{aligned}
$$

som leder til

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+i & 2-i \\ 1 & 0 & 1+2i & 1-2i \\ 1 & 1 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

med løsningen $A = B = \frac{1}{2}$ og $C = D = -\frac{1}{4}$.

Integralet av $A/(z+1)$ er $2\pi i A = \pi i$ (ved å integrere en gang rundt $z = -1$ i positiv omløpsretning).

Integralet av $B/(z+1)^2$ er null siden integranden har en antiderivert $-B/(z+1)$ og integrasjonsveien er lukket.

Integralet av $C/(z+i)$ er null, siden punktet $z=-i$ ligger på utsiden av integrasjonsveien.

Integralet av $D/(z-i)$ er $2\pi i D = -\frac{1}{2}\pi i$ (ved å integrere en gang rundt $z=i$ i positiv omløpsretning).

Det totale integralet er summen av disse, altså $\pi i + 0 + 0 - \frac{1}{2}\pi i = \frac{1}{2}\pi i$.

Oppgave 3.4.32: Prøv delbrøksoppspalting igjen:

$$\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{(\alpha-\beta)(z-\alpha)} + \frac{1}{(\beta-\alpha)(z-\beta)}.$$

Ved Jordans kurveteorem har den enkle, lukkede kurven C presis en innside og en utside. Den omgiir hvert punkt innenfor en gang i samme retning, enten alle i positiv retning eller alle i negativ retning. Så om α er på innsiden av C, vil det første leddet på høyresiden ovenfor gir et bidrag

$$\pm\frac{2\pi i}{\alpha-\beta}$$

til integralet. På samme måte, om β er på innsiden, vil det andre ledde gi et bidrag

$$\pm\frac{2\pi i}{\beta-\alpha}.$$

Hvis de begge er på innsiden, er summen av bidragene null. Så de mulige verdiene for integralet er null (dersom begge eller ingen av α, β er innenfor), eller

$$\pm\frac{2\pi i}{\alpha-\beta}$$

(med pluss hvis kurven er positivt orientert og bare α er innenfor, eller hvis kurven er negativt orientert og bare β er innenfor).

Oppgave 3.4.33: (a) Etter multipikasjon med fellesnevneren er venstresiden 1 mens høyresiden er $(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)z^{n-1}$ pluss ledd av lavere orden. Så den summen må være null.

(b) Integrasjon av delbrøksoppspaltingen rundt C resulterer i $\pm(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)2\pi i = 0$.

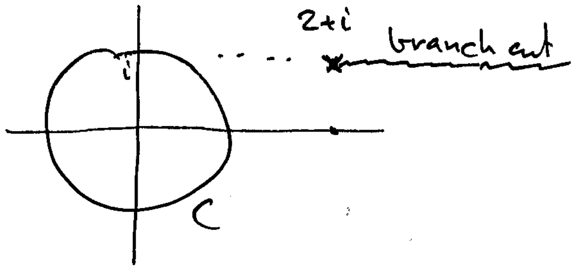
Oppgave 3.4.36: (a) Dette er opplagt.

(b) Også opplagt!

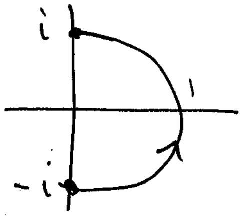
(c) Den nye avbildningen H er veldefinert fordi de to definisjonene for $s = \frac{1}{2}$ er sammenfallende: De er $H_1(t,1) = \gamma_1(t)$ og $H_2(t,0) = \gamma_1(t)$. Så er H kontinuerlig fordi både H_1 og H_2 er kontinuerlige, og vi er ferdig. (Vi må sjekke at H er en homotopi med lukkede veier, eller med fastholdte endepunkter, dersom H_1 og H_2 er av samme sort. Men det er også lett..)

(d) Kombiner punktene (a)–(c).

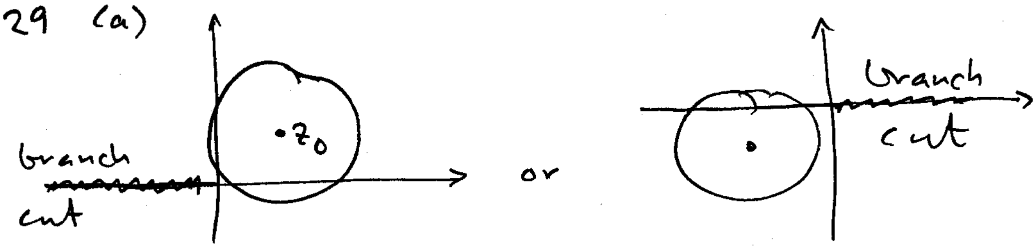
3.3.18



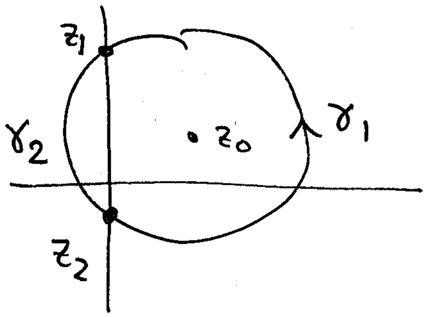
3.3.27



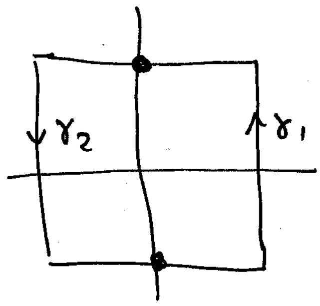
3.3.29 (a)



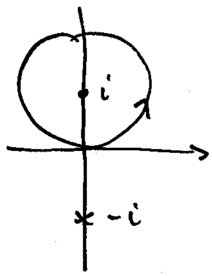
(b)



3.3.32



3.4.17



3.4.32

etc: 8 possibilities total: two orientations, α, β inside/outside.

3.4.36 (c)