MA2104 høsten 2007, Øving 4 uke 38: Løsningsforslag til øvingene

Det er noen tegninger bakerst. Teksten der er på engelsk pga gjenbruk.

Oppgave 3.1.3: $z = 3i + e^{it}$ for $t \in [0, 2\pi]$ (eller et vilkårlig annet lukket intervall med lengde 2π).

Oppgave 3.1.6: $z = e^{-it}$ for $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Oppgave 3.1.7:

$$z = \begin{cases} it & 0 \le t \le 1, \\ 1 - t + (2-t)i & 1 \le t \le 2, \\ t - 3 & 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

Oppgave 3.1.18: (Se bilde bakerst.)

Oppgave 3.1.23: Standard derivasjonsregler:

$$f'(t) = 2\frac{t+i}{t-i} \cdot \frac{t - i - (t+i)}{(t-i)^2} = -4i\frac{t+i}{(t-i)^3}.$$

Oppgave 3.2.3:

$$\int_{-1}^{0} \sin(ix)\, dx = \left[\frac{-\cos(ix)}{i}\right]_{x=-1}^{0} = i(\cos 0 - \cos(-i)) = i(1 - \cosh 1).$$

Oppgave 3.2.6: Derivasjonsregelen $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$ holder så lenge vi bruker samme gren av logaritmefunksjonen i begge potenser (altså når vi skriver $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ og tilsvarende for $z^{\alpha-1}$).

Dermed kan vi også bruke samme regelen i revers for antiderivasjon:

$$\int_1^2 x^i\, dx = \Big[\frac{x^{1+i}}{1+i}\Big]_{x=1}^{2} = \frac{2^{1+i} - 1}{1+i} = \frac{e^{(1+i)\ln 2} - 1}{1+i} = \frac{2(\cos\ln 2 + \sin\ln 2) - 1}{1+i}.$$

Siden oppgaven spesifiserte prinsipalgrenen av potensen, som betyr prinsipalgrenen av logaritmen så skal $\ln 2$ være den (vanlige) reelle verdien i formelen over.

Oppgave 3.2.11: Rett frem etter nesen: Parametriser $C_R(z_0)$ med $z = z_0 + Re^{it}$ for $t \in [0, 2\pi]$ slik at $(\overline{z - z_0})^n = R^n e^{-int}$. Videre er $dz = iRe^{it}\, dt$, så vi finner

$$\int_{C_r(z_0)} (\overline{z - z_0})^n\, dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{-int} \cdot iRe^{it}\, dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t}\, dt$$

som gir det oppgitte svaret.

En raskere, mer indirekte metode er å utnytte at $(\overline{z - z_0})(z - z_0) = |z - z_0|^2 = R^2$ for z på $C_R(z_0)$, slik at

$$\int_{C_R(z_0)} (\overline{z - z_0})^n\, dz = R^{2n} \int_{C_R(z_0)} \frac{dz}{(z - z_0)^n}$$

der vi kjenner det siste integralet fra før: Det er 0 unntatt for $n = 1$ da verdien er $2\pi i$.

Oppgave 3.2.16: Siden $2z + i$ har den antideriverte $z^2 + iz$ og veien er lukket, er integralet null. (Cauchys integralteorem gir selvsagt samme resultat.) Direkte beregning gir

$$\int_0^{2\pi} (2e^{it} + i) \cdot ie^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} (2ie^{2it} - e^{it})\, dt = 0.$$

Oppgave 3.2.17: Den første delen, parametrisert ved $z = ti + (1-t) = 1 + (i-1)t$ for $t \in [0,1]$:

$$\int_{[1,i]} 2\bar{z}\,dz = 2\int_0^1 (1 + (-i-1)t)\cdot(i-1)\,dt = \big(2-(i+1)\big)(i-1) = 2i.$$

Den andre delen, med $z = t(1+i) + (1-t)i = t+i$:

$$\int_{[i,1+i]} 2\bar{z}\,dz = 2\int_0^1 (t-i)\,dt = 1-2i.$$

Summen av de to gir

$$\int_{[1,i,1+i]} 2\bar{z}\,dz = 1.$$

Oppgave 3.2.21: Integranden har antiderivert $\frac{1}{2}z^2$, og veien er lukket, så integralet er null. En direkte utregning gir også

$$\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 (1+iy)\cdot i\,dy - \int_0^1 (x+i)\,dx - \int_0^1 iy\cdot i\,dy = \tfrac{1}{2} + (i-\tfrac{1}{2}) - (\tfrac{1}{2}+i) + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Oppgave 3.2.26: Oppgaven måtte tolkes litt: Jeg regner med at de mener $\gamma(t) = 8e^{it} + 5e^{-4it}$ for $t \in [0, 2\pi]$. Det gir

$$\begin{aligned}\int_\gamma \bar{z}\,dz &= \int_0^{2\pi} (8e^{-it} + 5e^{4it})\cdot(8ie^{it} - 20ie^{-4it})\,dt \\ &= i\int_0^{2\pi} (64 - 100 + 40e^{3it} - 160e^{-5it})\,dt \\ &= -72i\pi.\end{aligned}$$

Oppgave 3.2.31: $\gamma(t) = \frac{1}{5}t^5 + \frac{i}{4}t^4$ gir $\gamma'(t) = t^4 + it^3$, slik at $|\gamma'(t)| = \sqrt{t^8 + t^6} = t^3\sqrt{t^2+1}$. Vi stiller opp integralet for lengden av kurven og substituerer $u = t^2$, som gir $du = 2t\,dt$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^3\sqrt{t^2+1}\,dt &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 u\sqrt{u+1}\,du = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (u+1-1)\sqrt{u+1}\,du \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \big((u+1)^{3/2} - (u+1)^{1/2}\big)\,du \\ &= \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{2}{5}(2^{5/2}-1) - \tfrac{2}{3}(2^{3/2}-1)\big) = \tfrac{2}{15}(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

Oppgave 3.2.40: Fra definisjonen av integralet som en grense av summer: Hver summand har en faktor $z_j - z_{j-1} = 0$, så hele summen er null.

Eller fra definisjonen for (stykkevis) glatte veier: $\gamma'(t) = 0$ langs hele parameterintervallet betyr at vi integrerer konstanten 0.

Oppgave 3.3.8: $\frac{1}{2}e^{z^2} - \ln z$ er en antiderivert, gyldig i ethvert område der vi kan definere en kontinuerlig gren av logaritmefunksjonen.

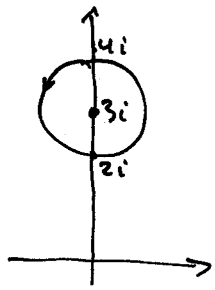
Oppgave 3.3.11: Du kan godt bruke partiell integrasjon når du leter etter en antiderivert, slik du er vant til fra reelle variable. Dette resulterer i $\frac{1}{2}z^2\,\mathrm{Ln}\,z - \frac{1}{4}z^2$, som kan verifiseres ved derivasjon.

Oppgave Ekstra: Alle verdier av i^i?

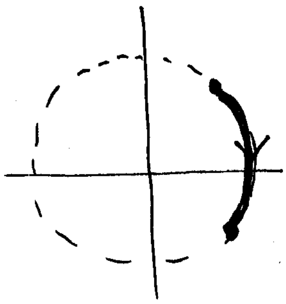
Vi skal ha $\ln i = \ln|i| + i\arg i = 0 + i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi$ med $k \in \mathbb{Z}$, som gir

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{-\pi/2 + 2k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

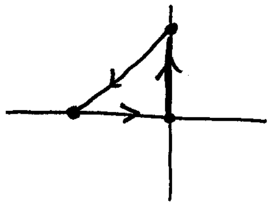
3.1.3



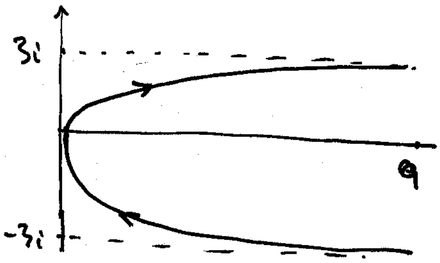
3.1.6



3.1.7

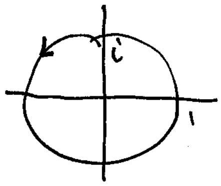


3.1.18

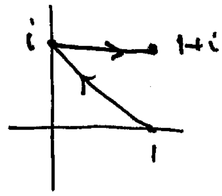


A HORRIBLE DRAWING! IT'S A PARABOLA, SYMMETRIC ABOUT THE REAL AXIS.

3.2.16



3.2.17



3.2.21