MA2104 høsten 2007, Øving 3 uke 37: Løsningsforslag til øvingene

Oppgave 2.3.5: Vi kan derivere med standard derivasjonsregler:

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{z^3+1} = \frac{-3z^2}{(z^3+1)^2}, \qquad z \notin \left\{-1, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{i}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{i}{2}\right\}.$$

Unntakene som er antydet er de punktene hvor $z^3 = -1$, som skjer for $z = e^{i(\pi/3+2j\pi/3)}$, hvor $j = 0, 1, 2$. Tilfellet $j = 1$ gir $z = e^{\pi} = -1$, mens $j = 0$ gir $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}$. Tilfellet $j = 2$ gir tilsvarende $z = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}$.

Oppgave 2.3.9: Skriv $z^{2/3} = e^{(2/3)\ln z}$ og deriver:

$$\frac{d}{dz}z^{2/3} = e^{(2/3)\ln z}\cdot\frac{2}{3z} = \tfrac{2}{3}e^{(2/3)\ln z}e^{-\ln z} = \tfrac{2}{3}e^{(2/3)\ln z-\ln z} = \tfrac{2}{3}e^{-(1/3)\ln z} = \tfrac{2}{3}z^{-1/3}$$

som er korrekt så lenge man bruker *samme gren av logaritmen* hele veien (for eksempel om man bruker prinsipalgrenen konsekvent).

Dette enkle prinsippet holder for alle potenser på formen z^α, med samme bevis. Et annet bevis er gitt i oppgave 2.3.21.

Oppgave 2.3.15: Skriv om:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z\sqrt{1+z}} - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+z}} - 1}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+z}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+0}}}{z}$$
$$= \frac{d}{dz}\frac{1}{\sqrt{1+z}}\bigg|_{z=0} = -\tfrac{1}{2}(1+z)^{-3/2}\Big|_{z=0} = -\tfrac{1}{2}$$

hvor jeg har brukt valget av prinsipalgrenen på slutten (se også merknaden på slutten av forrige løsning.)

Oppgave 2.3.21: Vi bruker identiteten

$$\left(z^{p/q}\right)^q = z^p. \tag{1}$$

Siden p og q er heltall, vil bare uttrykket $z^{p/q}$ produsere multiple verdier, og identiteten følger lett:

$$\left(z^{p/q}\right)^q = \left(e^{(p/q)\ln z}\right)^q = e^{p\ln z}.$$

Her har vi brukt identiteten $(e^w)^q = e^{qw}$, som vises ved induksjon på q.

For å bruke Teorem 2.3.4 (Asmar s. 96) med denne identiten, kan vi sette $g(z) = z^{p/q}$, $f(w) = w^q$ og $h(z) = z^p$. Identiteten ovenfor sier da $h(z) = f(g(z))$.

Så lenge vi arbeider i et område der $g(z) = z^{p/q}$ har en kontinuerlig gren og $z \neq 0$, er betingelsene for Teorem 4 oppfylt (spesielt $f'\big(g(z)\big) = q\big(g(z)\big)^{q-1} \neq 0$), så konklusjonen i det teoremet er at g er deriverbar og

$$\frac{d}{dz}z^{p/q} = g'(z) = \frac{h'(z)}{f'\big(g(z)\big)} = \frac{pz^{p-1}}{q\big(z^{p/q}\big)^{q-1}}.$$

Her tar jeg en hvilepause for å påpeke at de generelle reglene $w^{m+n} = w^m w^n$ og $\big(w^m\big)^n = w^{mn}$ aldri er problematiske for heltallige m og n, men de gir lett gale (paradoksale) resultater om man bruker dem på ikke-heltallige eksponenter. Men spesialtilfellet (1) er alltid riktig, så vi finner

$$\frac{d}{dz}z^{p/q} = \frac{pz^{p-1}}{q\big(z^{p/q}\big)^q\big(z^{p/q}\big)^{-1}} = \frac{p}{q}\frac{z^p z^{-1}}{z^p\big(z^{p/q}\big)^{-1}} = \frac{p}{q}\frac{z^{p/q}}{z}.$$

Akkurat som før kan dette forenkles videre til $\alpha z^{\alpha-1}$ der $\alpha = p/q$, forutsatt at potensene z^α og $z^{\alpha-1}$ regnes ut med samme gren av logaritmen.

Oppgave 2.3.27: Ettersom $g(z_0) = 0$ men $g'(z_0) = 0$, finnes det en punktert omegn om z_0 der $g(z) \neq 0$: For

$$\frac{g(z)}{z - z_0} = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \to g'(z_0) \neq 0 \qquad \text{(konvergens når } z \to z_0\text{)}$$

impliserer at venstresiden må være $\neq 0$ når $|z - z_0|$ er liten nok.

Således risikerer vi aldri å dividere med null i følgende regnestykke, så lenge $|z - z_0|$ er liten nok (og forskjellig fra null):

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} \to \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}, \qquad \text{når } z \to z_0.$$

Oppgave 2.3.28: (a) Siden $(i^2 + 1)^7 = 0$ og $i^6 + 1 = 0$, kan vi bruke L'Hospital:

$$\lim_{z \to i} \frac{(z^2 + 1)^7}{z^6 + 1} = \frac{14z(z^2 + 1)^6}{6z^5}\bigg|_{z=i} = \frac{14i(i^2 + 1)^6}{6i^5} = 0$$

(b) Verifiser at $i^3 + (1 - 3i)i^2 + (i - 3)i + 2 + i = 0$ (og $i - i = 0$ selvsagt) og bruk L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{z \to i} \frac{z^3 + (1 - 3i)z^2 + (i - 3)z + 2 + i}{z - i} &= \frac{3z^2 + 2(1 - 3i)z + i - 3}{1}\bigg|_{z=i} \\ &= -3 + 2(1 - 3i)i + i - 3 = 3i.\end{aligned}$$

Oppgave 2.4.6: We finner

$$\begin{aligned} u &= \frac{y}{x^2 + y^2}, & v &= \frac{-x}{x^2 + y^2}, \\ u_x &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, & v_y &= \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \\ u_y &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & v_x &= \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Således er $u_x = -v_y$ og $u_y = v_x$, som *ser ut som* Cauchy–Riemann-ligningene, bortsett fra det «lille» problemet at minustegnet står på feil plass. Derfor er de virkelige Cauchy–Riemann-ligningene $u_x = v_y$ og $u_y = -v_x$ oppfylt bare der hvor $xy = 0$ og $x^2 = y^2$, henholdsvis, og begge er dermed oppfylt bare der hvor $x = y = 0$. Nei, ikke der en gang, for der er ikke funksjonene definert.

Så den gitte funksjonen er ikke deriverbar i noe punkt.

Dette er kanskje ingen stor overraskelse om vi skriver om litt: Når $z = x + iy$ så er $-ix + y = -i(x + iy) = -iz$, så funksjonen vi betrakter er

$$\frac{-iz}{|z|^2} = \frac{-iz}{z\bar{z}} = \frac{-i}{\bar{z}}$$

og vi visste allerede at $z \mapsto \bar{z}$ ikke er analytisk.

Oppgave 2.4.31: Vi kan gjøre dette bedre enn boken foreslår, og definere en vilkårlig gren av den inverse tangentfunksjonen ved å bruke en vilkårlig gren av logaritmen:

$$\arctan z = \frac{i}{2} \ln \frac{1 - iz}{1 + iz}$$

som vi så deriverer med kjerneregelen:

$$\frac{d}{dz} \arctan z = \frac{i}{2} \frac{1 + iz}{1 - iz} \cdot \frac{-i(1 + iz) - i(1 - iz)}{(1 + iz)^2} = \frac{1}{(1 - iz)(1 + iz)} = \frac{1}{1 + z^2}$$

akkurat slik det burde være.

Oppgave 2.4.33: (a) Boken gir to formler for f' – nemlig (3) og (5) på side 101:

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

Gitt den andre Cauchy–Riemann-ligningen $u_y = -v_x$, er det selvsagt trivielt å skrive om disse som

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x.$$

(b) Den påståtte identiteten følger direkte fra det ovenstående samt identiteten $|a + ib|^2 = a^2 + b^2$ når a og b er reelle.

(c) Dersom u eller v er konstant i Ω, så følger $f' = 0$. Dermed er f konstant. (Dette krever at Ω er sammenhengende, men det er jo en del av *definisjonen* av et område.)

Oppgave 2.4.35: Me $f_x = u_x + iv_x$ og $f_y = u_y + iv_y$ finner vi

$$f_x + if_y = u_x + iv_x + i(u_y + iv_y) = u_x - v_y + i(v_x + u_y),$$

som er null presis når $u_x - v_y = 0$ og $v_x + u_y = 0$. Dette er jo Cauchy–Riemann-ligningene igjen.

Oppgave 2.4.38: (a) Siden $|f|^2 = u^2 + v^2$ er det klart at $|f|$ er konstant hvis og bare hvis $u^2 + v^2$ er konstant. Dersom $u^2 + v^2 = 0$ så er $f = 0$, så vi har ikke mer å bevise.

(b) Deriverer vi $u^2 + v^2 = c$ først med hensyn på x og deretter med hensyn på y (og dividerer begge ligningene med 2), får vi

$$uu_x + vv_x = 0, \quad uu_y + vv_y = 0.$$

Substituer $v_x = -u_y$ og $v_y = u_x$ fra Cauchy–Riemann-ligningene for å få

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0.$$

(c) Disse ligningene kan skrives

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisen på venstre side har determinant $u^2 + v^2 = c > 0$, så vi må ha $u_x = u_y = 0$.

(d) Vi kan rett og slett henvise til oppgave 2.4.33 for å konkludere med at f er konstant.