MA2104 høsten 2007, Øving 2 uke 36: Løsningsforslag til øvingene

Det er noen tegninger bakerst. Teksten der er på engelsk pga gjenbruk.

Oppgave 1.2.12:

$$\left|\frac{1+i}{(1-i)(1+3i)}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|\cdot|1+3i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Oppgave 1.5.4: Husk at $e^{2ik\pi} = 1$ og $e^{i\pi} = -1$, så $e^{201i\pi} = e^{200i\pi}e^{i\pi} = 1\cdot(-1) = -1$.

Oppgave 1.5.10: Som over. Merk at $701/4 = 175\frac{1}{4} = 174 + \frac{5}{4}$ slik at $e^{701i\pi/4} = e^{5i\pi/4} = -e^{i\pi/4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$.

Oppgave 1.5.12: Vi finner

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

så tallet har absoluttverdi (modulus) en. Vi er på jakt etter løsninger til $\cos\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ og $\sin\theta = \frac{1}{2}$, og $\theta = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$ passer bra. Dermed er

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{5i\pi/6}.$$

Oppgave 1.5.17: Først forenkler vi:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-i^2}{2} = i = e^{i\pi/2}.$$

Begrunnelsen for den første manipulasjonen her er at vi vet at $z\bar{z}$ altid er reell, så vi får en reell nevner ved å multiplisere og dividere med den konjugerte av $1-i$.

Oppgave 1.5.29: Siden $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ har absoluttverdi $|e^{x+iy}| = e^x$, og vi har antatt $x_1 \le x \le x_2$, finner vi at $e^{x_1} \le |e^{x+iy}| \le e^{x_2}$ slik at e^{x+iy} ligger mellom de to sirklene med radius e^{x_1} og e^{x_2} henholdsvis.

På samme måte er $\operatorname{Arg} e^{x+iy} = y$ så lenge $-\pi < y \le \pi$. I dette tilfellet er $0 \le \alpha_1 \le y \le \alpha_2 \le \pi$, så argumentet ligger mellom α_1 og α_2 som i bildet.

Det er klart at siden alle x tar alle verdier mellom x_1 og x_2 så vil $|e^{x+iy}|$ ta alle verdier mellom e^{x_1} og e^{x_2}, og tilsvarende vil argumentvinkelen ta alle verdier mellom α_1 og α_2, så vi får fylt ut hele sektoren.

Oppgave 1.6.22: Om du velger rent imaginære verdier for z, altså $z = iy$ med $y \in \mathbb{R}$, da er $\cos z = \cos iy = \cosh y$ som er ubegrenset. På samme måte er $\sin iy = i\sinh y$ som også er ubegrenset.

Oppgave 1.6.40:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = 1.$$

Eller vi kan bruke $\cosh z = \cos iz$ og $\sinh z = -i\sin iz$, så

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Oppgave 1.7.2: Skriv tallet på polar form. $|-3-3i| = 3\sqrt{2}$, og $(-3-3i)/|-3-3i| = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) = e^{5i\pi/4}$. Så $\ln(-3-3i) = \ln(3\sqrt{2}) + i\arg(-3-3i) = \ln(3\sqrt{2}) + 5i\pi/4 + 2ki\pi$, for $k \in \mathbb{Z}$. Skal du ha prinsipalverdien må du velge $k = -1$, som gir argumentvinkelen $-3\pi/4 \in (-\pi, \pi]$.

Oppgave 1.7.14: Skriv $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, så ved å ta logaritmer får vi $-z=\ln\sqrt{2}+i\pi/4+2ki\pi$, det vil si $z=-\frac{1}{2}\ln 2+i\pi/4-2ki\pi$ for $k\in\mathbb{Z}$.

Oppgave 1.7.19b: Per definisjon er $\operatorname{Ln} w=\ln|w|+i\operatorname{Arg} w$, så $-\pi<\operatorname{Im}\operatorname{Ln} w\le\pi$ for alle w. Spesielt vil $\operatorname{Ln} e^z=z$ implisere $-\pi<\operatorname{Im} z\le\pi$.

Omvendt, merk at $e^z=e^{\operatorname{Re} z}e^{i\operatorname{Im} z}$ har argument $\operatorname{Im} z$. Hvis $-\pi<\operatorname{Im} z\le\pi$ så må dette være prinsipalverdien av argumentet, det vil si $\operatorname{Arg} e^z=\operatorname{Im} z$. Således er $\operatorname{Ln} e^z=\ln|e^z|+i\operatorname{Im} z=\ln e^{\operatorname{Re} z}+i\operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z+i\operatorname{Im} z=z$.

Oppgave 1.7.31: Den gitte ligningen har disse ekvivalente formene:

$$\begin{aligned}
\cos z&=\sin z\\
\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}&=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\\
i(e^{iz}+e^{-iz})&=e^{iz}-e^{-iz}\\
i(e^{2iz}+1)&=e^{2iz}-1\\
1+i&=(1-i)e^{2iz}\\
e^{2iz}&=\frac{1+i}{1-i}=i=e^{i\pi/2}\qquad\text{se oppgave 1.5.17}\\
2iz&=\frac{i}{2}\pi+2k\pi i,\qquad k\in\mathbb{Z}\\
z&=(k+\tfrac{1}{4})\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Oppgave 1.7.32a: Vi definerer $w=\arccos z$ ved å løse $\cos w=z$ for w. Skriv om som følger:

$$\begin{aligned}
\cos w&=z\\
e^{iw}+e^{-iw}&=2z\\
e^{2iw}-2ze^{iw}&=-1\\
\bigl(e^{iw}-z\bigr)^2&=-1+z^2\\
e^{iw}&=z\pm\sqrt{z^2-1}\\
iw&=\ln\bigl(z\pm\sqrt{z^2-1}\bigr)\\
w&=-i\ln\bigl(z\pm\sqrt{z^2-1}\bigr)
\end{aligned}$$

Boken skriver ikke $\pm$ foran kvadratrøttene, men da burde det være implisitt at begge grenene av kvadratrotfunksjonen er tillatt. Og deretter kan man velge blant uendelig mange grener for logaritmen. Forresten, om man velger en gren av kvadratroten så finner man $\bigl(z+\sqrt{z^2-1}\bigr)\bigl(z-\sqrt{z^2-1}\bigr)=1$, altså de to tallene $z\pm\sqrt{z^2-1}$ er inverser av hverandre. Så svaret kunne også skrives

$$w=\pm i\ln\bigl(z+\sqrt{z^2-1}\bigr).$$

Det er langt fra opplagt hvordan man velger grener for arccos, annet enn når $z=x$ er reell og ligger mellom -1 og 1. Da er tallet i kvadratroten negativt, så det er bedre å skrive $w=\pm i\ln\bigl(x+i\sqrt{1-x^2}\bigr)$. Uttrykket i logaritmen ligger på øvre halvdel av enhetssirkelen, så om vi velger prinsipaldelen av logaritmen og minustegnet foran, så ender vi med $w\in[0,\pi]$, akkurat slik vi er vant til fra den reelle arccos-funksjonen. Om vi snitter opp planet langs den reelle aksen fra -1 til $-\infty$ og fra $+1$ til $+\infty$, kan arccos defineres analytisk i det som er igjen av planet. Det gir definisjonen som man vanligvis finner i numeriske implementasjoner.

Oppgave 2.1.4: $\bigl\{z\colon 1<|z-i|\le 2\bigr\}$ har indre $\bigl\{z\colon 1<|z-i|<2\bigr\}$ og rand $\bigl\{z\colon |z-i|=1 \text{ or } |z-i|=2\bigr\}$.

Oppgave 2.1.8: $\{z \colon z \neq 0,\ |\operatorname{Arg} z| < \frac{1}{4}\pi\}$ er åpen, sammenhengende (således et område), men ikke lukket.

Oppgave 2.1.17: Et randpunkt for S er definert ved at enhver omegn om punktet inneholder noen punkter i S og noen punkter utenfor S, altså i komplementet. Siden dette kravet er symmetrisk i S og komplementet (det endres ikke når S erstattes med sitt komplement), har S og $\mathbb{C} \setminus S$ samme rand.

Hvis S er åpen så har hvert punkt i S en omegn inneholdt i S, og derfor er ikke punktet et randpunkt. Omvendt, om S ikke er åpen så finnes et punkt $z \in S$ slik at enhver omegn om z inneholder et punkt utenfor S. Siden z tilhører enhver omegn om seg selv, er z et randpunkt.

Med andre ord, S er åpen hvis og bare hvis den ikke inneholder noen av sine randpunkter. Med andre ord, den er åpen hvis og bare hvis randen er inneholdt i komplementet, som betyr at komplementet er lukket.

Det må være lassevis av måter å organisere dette resonnementet på. Gå ikke ut fra at ditt resonnement er feil bare fordi det ikke ligner på mitt. Denne kommentaren kunne vel knyttes til alle besvarelser, men spesielt mye her.

Oppgave 2.1.21: Først, om A og B er åpne så er $A \cup B$ åpen. For om $z \in A \cup B$ så er $z \in A$ eller $z \in B$. Hvis $z \in A$ så er en omegn om z inneholdt i A, siden A er åpen. Men så er den omegnen også inneholdt i $A \cup B$. Det samme skjer dersom $z \in B$.

Løsningen ovenfor er skrevet ut fra lærebokens definisjon av omegn om z som en åpen ball med sentrum i z. Jeg foretrekker egentlig den definisjonen som sier at en omegn er en mengde som *inneholder* en åpen ball med sentrum i z. Da er A åpen hvis og bare hvis den er en omegn om alle sine punkter. Hvis $z \in A \cup B$ så er enten $z \in A$, så $A \cup B$ er en omegn om z fordi A er det; eller så er $z \in B$, så $A \cup B$ er en omegn om z fordi B er det.

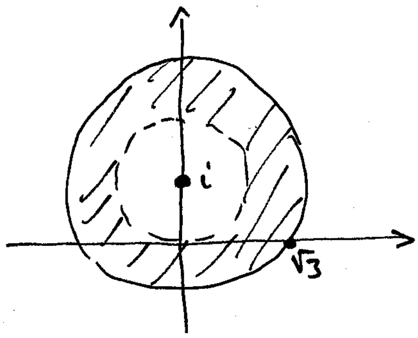
Dernest, om A og B er (vei-)sammenhengende og $z_0 \in A \cap B$ så finnes en kurve i enten A eller i B fra z_0 til ethvert punkt i $A \cup B$, siden begge mengder er sammenhengende. Så vi kan finne en kurve i $A \cup B$ mellom hvilke som helst to punkter, ved å gå fra det ene til z_0 og derfra til det andre.

Oppgave 2.2.6: $\operatorname{Arg} z$ er begrenset siden $|\operatorname{Arg} z| \leq \pi$. Skviseloven gir nå at $z \operatorname{Arg} z \to 0$ når $z \to 0$.

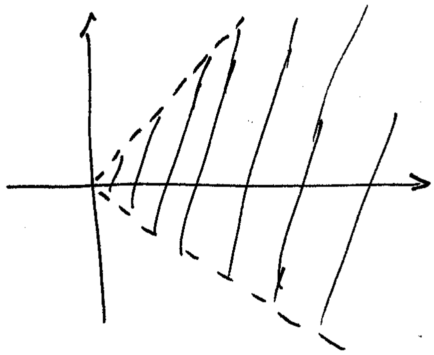
Oppgave 2.2.9: Grovt regnet så vil $\operatorname{Arg} z \to \pi$ hvis z nærmer seg den negative reelle aksen ovenfra, mens $\operatorname{Arg} z \to -\pi$ hvis det skjer nedenfra. I begge tilfeller vil $(\operatorname{Arg} z)^2 \to \pi^2$, så vi skulle ha $\lim_{z \to -3} (\operatorname{Arg} z)^2 = \pi^2$.

Oppgave 2.2.23: Når $z \to 0$ langs den reelle aksen så vil $1/z \to \pm\infty$, med plusstegnet hvis vi kommer fra høyre, og minustegnet hvis vi kommer fra venstre. I def første tilfellet vil $e^{1/z} \to \infty$, og i det andre tilfellet vil $e^{1/z} \to 0$. Så den gitte grensen eksisterer ikke. (Videre, langs den imaginære aksen $z = iy$ blir $e^{1/z} = e^{-i/y}$ som har absoluttverdi 1, men som løper rundt på enhetssirkelen uendelig ofte når $y \to 0$ fra den ene eller andre siden.)

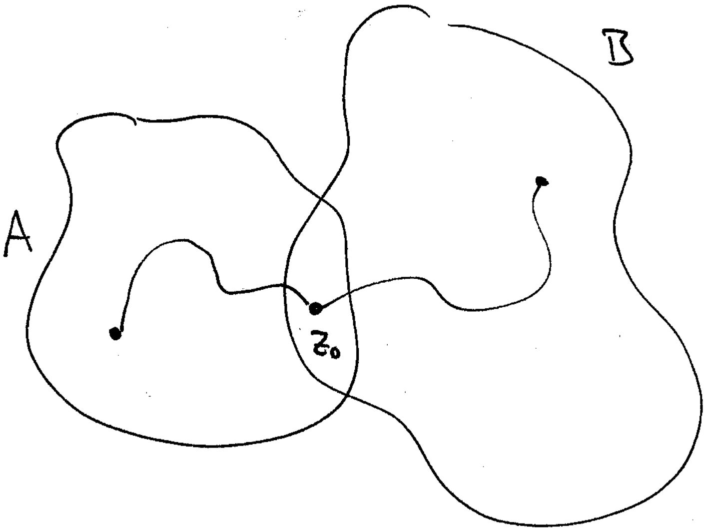
2.1.4



2.1.8



2.1.21



If A and B are open, I ought to draw the boundaries dotted, but I am too lazy.

2.2.9