MA2104 høsten 2007, Øving 1 uke 35: Løsningsforslag til øvingene

Det er noen tegninger bakerst. Teksten der er på engelsk pga gjenbruk.

Oppgave 1.2.12:

$$\left|\frac{1+i}{(1-i)(1+3i)}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|\cdot|1+3i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Oppgave 1.2.23: Flere har problemer her fordi oppgaven er *for lett*, og de tror det må være noe lureri! Skriv som vanlig $z = x + iy$ med $x, y \in \mathbb{R}$. (a) $\operatorname{Re} z = a$ blir til $x = a$. (b) $\operatorname{Im} z = b$ blir til $y = b$. (c) Dette er slik vi har lært å parametrisere en linje i planet, oversatt til komplekst språk. Men *hvis du virkelig ønsker å arbeide hardere*, kan du skrive $z_2 - z_1$ på polar form som $z_2 - z_1 = re^{i\theta}$ og merke deg at $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$ kan multipliseres med $e^{-i\theta}$, som gir $e^{-i\theta}z = e^{-i\theta}z_1 + tr$, og fra dette kan du ta imaginærdelen og få $\operatorname{Im}(e^{-i\theta}z) = b$ hvor $b = \operatorname{Im}(e^{-i\theta}z_1)$ er konstant. Med andre ord, multiplikasjon med $e^{-i\theta}$ avbilder den gitte kurven på en horisontal linje. Men det er jo bare rotasjon med en vinkel $i\theta$, og en rotert linje er stadig vekk en linje.

Oppgave 1.2.24: Min favoritt: Den gitte ligningen er ekvivalent med $z_1 - z_2 = t(z_1 - z_3)$ der $t \in \mathbb{R}$, som sier at $z_1 - z_2$ og $z_1 - z_3$ er parallelle. Elementær geometri forteller oss at det hender presis når alle tre punktene ligger på en linje.

Men om du gjerne vil bruke 1.2.23(c), så kan du merke det at den oppgaven konkluderte med at z_3 ligger på linjen gjennom z_1 og z_2 hvis og bare hvis vi kan skrive $z_3 = z_1 + t(z_2 - z_1)$ med $t \in \mathbb{R}$. Men den ligningen er ekvivalent med $z_3 - z_1 = t(z_2 - z_1)$, som vi kan skrive som $z_1 - z_2 = t^{-1}(z_1 - z_3)$, og dette har samme form som den gitte ligningen der t er erstattet med t^{-1}. Ettersom $t_3 \neq t_2$ per antagelse så trenger vi ikke bekymre oss om tilfellene $t = 0$ eller $t^{-1} = 0$ i disse ligningene.

Oppgave 1.2.38: Vi har gitt at $|z - i| \le \frac{1}{2}$, og det spørres etter en øvre grense for $1/|z-1|$. Det vil si, det spørres etter konstanten c i en ulikhet $1/|z-1| \le c$. Den ulikheten er ekvivalent med $|z-1| \ge 1/c$, så vi er ute etter en *nedre* begrensning på $|z-1|$.

Litt geometrisk tenkning kan hjelpe: Den gitte ulikheten sier at z ikke ligger en større avstand enn $\frac{1}{2}$ fra i. Avstanden fra i til 1 er $\sqrt{2}$, og det nærmeste z kan komme til 1 er ved å ligge på den linjen, i avstand $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Ved bruk av trekantulikheten:

$$|1 - i| = |1 - z + z - i| \le |1 - z| + |z - i|$$

slik at $|z - 1| \ge \sqrt{2} - |z - i| \ge \sqrt{2} - \frac{1}{2}$. Så vi får en øvre begrensning

$$\left|\frac{1}{1-z}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+1} = \frac{2}{2\sqrt{2}-1} = \frac{4\sqrt{2}+2}{7}.$$

(Velg det enkleste/peneste svaret selv.)

Oppgave 1.3.34: $z^3 = 1 + i$ kan skrives på polarform $z = re^{i\theta}$ som $r^3e^{3i\theta} = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Det gir $r^3 = \sqrt{2}$ (så $r = 2^{1/6}$) og $3\theta = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$, med $k \in \mathbb{Z}$[1] Med andre ord $\theta = \frac{1}{12}\pi + 2k\pi/3$, men bare verdiene $k = 0, 1, 2$ gir forskjellige z. Endelig løsning: z må være en av

$$2^{1/6}e^{i\pi/12}, \quad 2^{1/6}e^{9i\pi/12}, \quad 2^{1/6}e^{17i\pi/12}.$$

Den prinsipale roten er den første av disse.

[1] $\mathbb{Z}$ er mengden av heltall.

Oppgave 1.3.36: Samme idé som over men nå er $-30 = 30e^{i\pi}$, og vi får løsningene

$$z = 30^{1/5}e^{i\pi/5}, \quad z = 30^{1/5}e^{3i\pi/5}, \quad z = 30^{1/5}e^{5i\pi/5} = -30^{1/5},$$
$$z = 30^{1/5}e^{7i\pi/5}, \quad z = 30^{1/5}e^{9i\pi/5}.$$

Igjen er prinsipalroten først, selv om den midterste roten (sist på første linje) virker som en mer naturlig rot når du er vant til reelle variabler.

Oppgave 1.3.43: Bruk standardformelen for løsningen av annengradsligningen! Eller kompletter kvadratet:

$$\begin{aligned}
z^2 - 2(1+i)z + i &= 0 \\
z^2 - 2(1+i)z + (1+i)^2 &= -i + (1+i)^2 = 1 + i + i^2 = i \\
(z-1-i)^2 &= i \\
z - 1 - i &= \pm\sqrt{i} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) \\
z &= 1 + i \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)
\end{aligned}$$

så kan du skrive det endelige svaret på diverse former.

Oppgave 1.3.48: De Moivre's identitet for tredjepotenser er $(e^{i\theta})^3 = e^{3i\theta}$ i forkortet form, eller skrevet ut

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta \\
\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta
\end{aligned}$$

(koeffisientene på venstresiden er i^0, $3i^1$, $3i^2$, i^3), og løsningen er nå bare et spørsmål om å sammenligne imaginærdeler. (og realdeler for å løse 1.3.47).

Oppgave 1.3.51: Skriv $z = re^{i\theta}$. Da blir $z^n = 1$ til $r^n e^{in\theta} = 1$, som impliserer $r = 1$ og $n\theta = 2k\pi$ med $k \in \mathbb{Z}$. Skriv dette som $\theta = 2k\pi/n$ og legg merke til at z er uendret om du legger til et helt multiplum av 2π, så bare $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ gir forskjellige verdier. Vi skriver

$$\omega_k = e^{2ik\pi/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(eller $k = 1, 2, \ldots n$ om vi skal følge boken). $\omega_0 = 1$ (ω_n om du vil) er den trivielle roten, and også den prinsipale roten.

(De *primitive* røttene er de ω_k der k og n ikke har noen ikketrivielle felles faktorer. Ekvivalent, en primitiv rot til $z^n = 1$ er et tall ω slik at enhver rot i ligningen er en heltallig potens av ω. Spesielt, om n er et primtall så er alle ikketirivelle røtter primitive.)

Oppgave 1.3.53: Her får vi et lite notasjonsproblem, siden jeg brukte ω_0 i min løsning ovenfor. La meg bare skrive ω for en ω_k med $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

(a) Trivielt: $(\omega\omega_j)^n = \omega^n\omega_j^n = 1 \cdot 1 = 1$.

(b) Også trivielt: Multipliser $\omega_j \neq \omega_k$ med $\omega \neq 0$.

(c) Ved (b) er røttene både $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ og $\{\omega\omega_1, \ldots, \omega\omega_n\}$. Vi summerer og får

$$\omega_1 + \cdots + \omega_n = \omega\omega_1 + \cdots + \omega\omega_n = \omega(\omega_1 + \cdots + \omega_n)$$

slik at $\omega_1 + \cdots + \omega_n = 0$ fordi $\omega \neq 1$.

(d) Dette er mye penere:

$$(1-\omega)(1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1}) = 1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} - (\omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n) = 1 - \omega^n = 0.$$

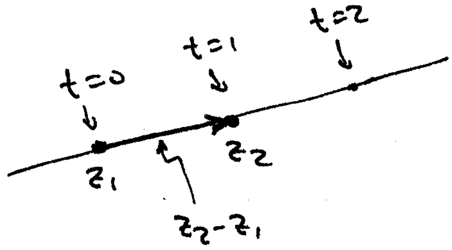
Siden $(1-\omega) \neq 0$ er summen null. Du gjenkjenner utledningen av formelen for summen av en endelig geometrisk rekke her, ikke sant?

Oppgave 1.4.24: Merk at multiplikasjon med i roterer S 90 grader i positiv retning, mens å addere 2 flytter resultatet to enheter mot høyre. Se tegningene bakerst.

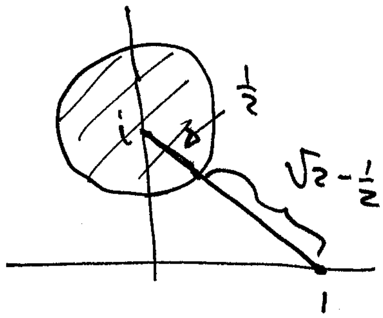
Oppgave 1.5: *Finn bildet* $f[S]$ *av mengden* $S = \{x + iy \colon x \leq 0 \text{ and } -\pi \leq y \leq 0\}$ *der* $f(z) = e^z$.

Nå er $f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. $x \leq 0$ blir til $0 < e^x \leq 1$, og $-\pi \leq y \leq 0$ plasserer punktet i nederste halvplan. Bildet er en halvdisk (halsirkelskive) $0 < |w| \leq 1$, $\operatorname{Im} w \leq 0$. (Merk at origo ikke er en del av bildet.) Se tegningene bakerst.

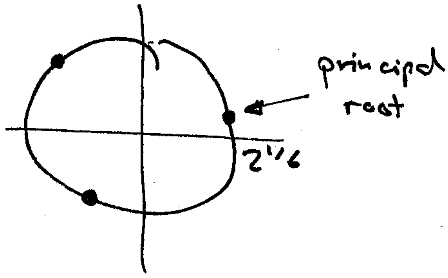
1.2.23



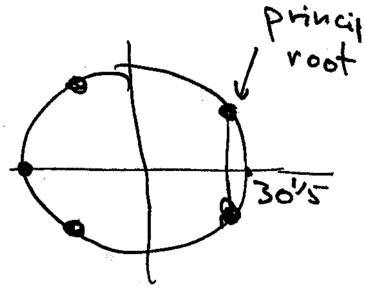
1.2.38



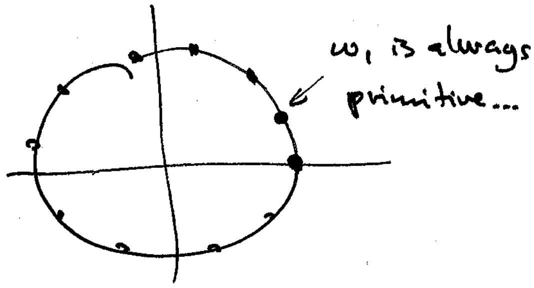
1.3.34



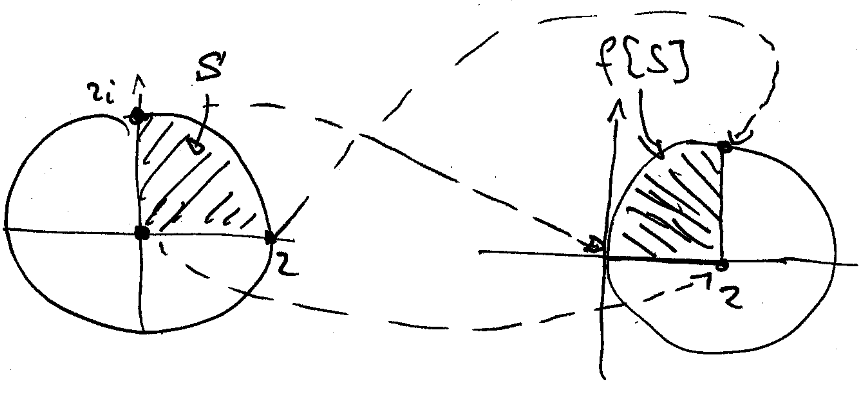
1.3.36



1.3.51



1.4.24



1.5.